

NUH-2012

ক বিভাগ

- ১। (ক) অনুসমতা সম্পর্কের সংজ্ঞা দাও। [Define congruence relation.]
- (খ) গ্রুপের সংজ্ঞা দাও। [Define group.]
- (গ) একটি গ্রুপের একটি উপাদানের ক্রমের সংজ্ঞা দাও। [Define order of an element of a group.]
- (ঘ) চক্রক্রমিক গ্রুপ বলতে কি বুঝায়? [What do you mean by cyclic group?]
- (ঙ) H গ্রুপ G-এর একটি উপগ্রুপ হলে G-তে H-এর নর্মালাইজার $N(H)$ সংজ্ঞায়িত কর। [If H is a subgroup of a group G define normalizer $N(H)$ of H in G.]
- (চ) নর্মাল উপগ্রুপ কি? [What is normal subgroup?]
- (ছ) গ্রুপের কার্ণেল-এর সংজ্ঞা দাও। [Define kernel of a group.]
- (জ) ইন্টিগ্রাল ডোমেন এর সংজ্ঞা দাও। [Define integral domain.]
- (ঝ) রিং অনুচিহ্ন কি? [What is ring homomorphism?]
- (ঞ) বহুপদী রিং এর সংজ্ঞা দাও। [Define polynomial ring.]
- (ট) স্প্লিটিং ফিল্ডের সংজ্ঞা দাও। [Define splitting field.]
- (ঠ) একটি ফিল্ডের বীজগণিতীয় সম্প্রসারণের সংজ্ঞা দাও। [Define an algebraic extension of a field.]

খ বিভাগ

- ২। মনে কর, $(G, *)$ একটি গ্রুপ। প্রমাণ কর যে $[(G, *)$ be a group. Show that], (i) $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$; (ii) $(a^{-1})^{-1} = a, \forall a, b \in G$

- ৩। $T = \{a, b, c\}$ হয়, তবে দেখাও যে, T এর উপর $T \times T$ একটি সমতুলতা সম্পর্ক। [If $T = \{a, b, c\}$, then show that $T \times T$ is an equivalence relation on T.]
- ৪। প্রমাণ কর যে, G-এর একটি অশূন্য উপসেট H, G-এর একটি উপগ্রুপ হবে যদি এবং কেবল যদি $ab^{-1} \in H, \forall a, b \in H$ । [Let H be a non-empty subset of a group G. Then show that H is a sub-group of G if and only if $\forall a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$.]
- ৫। যদি $f: G \rightarrow G'$ একটি গ্রুপ অনুচিহ্ন হয় তবে দেখাও যে অনুচিহ্নের কার্ণেল G-এর একটি নর্মাল উপগ্রুপ। [If $f: G \rightarrow G'$ is a group homomorphism, then prove that ker f is a normal sub-group of G.]
- ৬। যদি R একটি রিং হয় তবে দেখাও যে [If R is a ring then show that],

$$(-a)(-b) = ab \forall a, b \in R$$
- ৭। যদি $f: R \rightarrow R'$ একটি রিং অনুচিহ্ন হয় তবে দেখাও যে, $\text{Im } f, R'$ এর একটি উপরিং হবে। [If $f: R \rightarrow R'$ is a ring homomorphism then show that $\text{Im } f$ is a subring of R' .]
- ৮। দেখাও যে, ফিল্ড এর কোনো শূন্য ভাজক নেই। [Show that, a field has no zero divisors.]
- ৯। যদি R একটি ইন্টিগ্রাল ডোমেন হয়, তবে $R[x]$ ও একটি ইন্টিগ্রাল ডোমেন হবে। [If R is an integral domain, then show that $R[x]$ too an integral domain.]

গ বিভাগ

- ১০। লাগরাঞ্জ উপপাদ্যটি বর্ণনা ও প্রমাণ দাও। এর বিপরীত উপপাদ্যটি কি সর্বদা সত্য? উত্তরের যথার্থতা দেখাও। [State and prove Lagrange's theorem. Is the converse of this theorem always true? Justify your answer.]
- ১১। উপগ্রুপের সংজ্ঞা দাও। মনে কর H, G-এর একটি উপগ্রুপ, $x \in G$ এবং $xHx^{-1} = \{xhx^{-1} : h \in H\}$ প্রমাণ কর যে, xHx^{-1}, G -এর উপগ্রুপ। [Define

a subgroup. Let H be a subgroup of G and let $x \in G$ and $xHx^{-1} = \{xhx^{-1} : h \in H\}$. Prove that xHx^{-1} is a subgroup of G .]

- ১২। যদি G একটি গ্রুপ এবং H একটি উপগ্রুপ যার সূচক G -এর মধ্যে ২, তবে দেখাও H, G -এর একটি নরমাল উপগ্রুপ। [If G is a group and H is a subgroup of index 2 in G , then show that H is a normal subgroup in G .]
- ১৩। একটি গ্রুপে অনুবন্ধী উপাদান ও অনুবন্ধী শ্রেণী এর সংজ্ঞা দাও। প্রমাণ কর যে, অনুবন্ধী সম্পর্ক একটি সমতুলতা সম্পর্ক। [Define conjugate element and conjugacy classes in a group. Prove that the relation of conjugacy is an equivalence relation.]
- ১৪। উদাহরণসহ আইডিয়ালের সংজ্ঞা দাও। প্রমাণ কর যে, দুটি আইডিয়ালের ছেদকও একটি আইডিয়াল। [Define an ideal with example. Prove that the intersection of two ideals is also an ideal.]
- ১৫। মনে কর, R এবং T দুটি রিং এবং $f : R \rightarrow T$ একটি রিং অনুচিত্রণ। প্রমাণ কর যে, $\frac{R}{\ker F} \cong \text{Im } f$ । [Let R and T be two rings and $f : R \rightarrow T$ be a ring homomorphism. Prove that $\frac{R}{\ker F} \cong \text{Im } f$.]
- ১৬। বহুপদী রিং এর সংজ্ঞা দাও। দেখাও যে, এটা মুখ্য আইডিয়াল রিং। [Define polynomial ring. Prove that it is a principal ideal ring.]
- ১৭। (ক) প্রমাণ কর যে, স্পিটিং ফিল্ডসমূহ বীজগণিতীয় সম্প্রসারণ। [Show that splitting fields are algebraic extension.]
(খ) উদাহরণের মাধ্যমে দেখাও যে, কোন ফিল্ডের বীজগণিতীয় সম্প্রসারণ সসীম সম্প্রসারণ হওয়া প্রয়োজনীয় নয়। [Give an example to show that an algebraic extensions of a field is not necessarily a finite extension.]