

## NUH-2013

## ক বিভাগ

- ১। (ক) দ্বিপদী সম্পর্কের সংজ্ঞা দাও। [Define binary relation.]
- (খ)  $(a, b)$  এবং  $\{a, b\}$  বলতে কি বুঝ? [What do mean by  $(a, b)$  and  $\{a, b\}$ ?]
- (গ) মনোয়েড (Monoid) কি? [What is Monoid?]
- (ঘ) একটি চক্রগ্রুপের সৃজক বলতে কি বুঝ? [What do you mean by the generator of a cyclic group?]
- (ঙ)  $G = \{1, -1, i, -i\}$  একটি গুণকীয় গ্রুপ যার উপগ্রুপ  $H = \{1, -1\} \cdot H$  এর ডান কোসেটসমূহ বাহির কর। [ $G = \{1, -1, i, -i\}$  is a sub-group of the multiplicative group  $H = \{1, -1\} \cdot H$ . Find out the right cosets of  $H$  in  $G$ .]
- (চ) বহুপদী রিং-এর সংজ্ঞা দাও। [Define polynomial Ring?]
- (ছ) বিভাজিত গ্রুপের সংজ্ঞা দাও। [Define quotient group.]
- (জ)  $f: G \rightarrow G'$  একটি গ্রুপ অনুচিত্রণ হলে  $f$  এর কার্নেল বলতে কি বুঝ? [If  $f: G \rightarrow G'$  is group homomorphism then what do you mean by kernel of  $f$ ?]
- (ঝ) কোসেট কি? [What is coset?]
- (ঞ) স্বাভাবিক উপ-গ্রুপ কি? [Define a normal sub-group?]
- (ট) ফিল্ডের সংজ্ঞা দাও। [Define a field.]
- (ঠ) সসীম ফিল্ড সম্প্রসারণ-এর একটি উদাহরণ দাও। [Give an example of finite field extension.]

## খ বিভাগ

- ২। যদি  $G$  একটি গ্রুপ হয়, যার জন্য  $(ab)^i = a^i b^i$  যখন  $a, b \in G$  পরপর তিনটি ক্রমিক সংখ্যা, দেখাও যে,  $G$  হয় অ্যাবেলিয়ান। [If  $G$  is a group such that  $(ab)^i = a^i b^i$  for three consecutive integers for all  $a, b \in G$  then show that  $G$  is abelian.]
- ৩। প্রমাণ কর যে, কোনো চক্র গ্রুপের প্রত্যেকটি উপ-গ্রুপ চক্র হবে। [Prove that every sub-group of a cyclic group is cyclic.]
- ৪।  $a$  এবং  $x, G(G, *)$  গ্রুপের যে কোনো দু'টি উপাদান হলে প্রমাণ কর যে,  $o(a) = O(x^{-1}ax)$ । [If  $a$  and  $x$  are two arbitrary elements of group  $x, G(G, *)$  then prove that  $o(a) = O(x^{-1}ax)$ .]
- ৫। যদি  $H$  এবং  $K, G$  গ্রুপের উপ-গ্রুপ হয় তখন দেখাও যে,  $HK$  গ্রুপ  $G$  এর উপ-গ্রুপ হবে যদি কেবল যদি  $HK = KH$  হয়। [If  $H$  and  $K$  are sub-groups of a group  $G$  then show that  $HK$  is a sub-group of  $G$  if  $HK = KH$ .]
- ৬। প্রমাণ কর যে, প্রত্যেকটি সসীম বিলোপন এলাকা একটি ফিল্ড। [Prove that every finite integral domain is a field.]
- ৭। প্রমাণ কর যে, প্রত্যেকটি সসীম সম্প্রসারণ ফিল্ড বীজগণিতীয় সম্প্রসারণ। [Prove that every finite extension of a field is an algebraic extension.]
- ৮। যদি  $f: R \rightarrow R'$  একটি রিং অনুচিত্রণ হয় তবে দেখাও যে,  $\text{Ker } f$  হল  $R$  এর একটি আইডিয়াল। [ $f: R \rightarrow R'$  is a ring homomorphism then show that  $\text{Ker } f$  is an ideal of  $R$ .]
- ৯। ইউক্লিডিয় রিং কি? দেখাও যে, প্রত্যেক ইউক্লিডিয় রিং মুখ্য আইডিয়াল রিং। [What is Euclidean ring? Show that every Euclidean ring is a principal ideal ring.]

## গ বিভাগ

১০। (ক)  $A, B, C$  তিনটি সেটের জন্য প্রমাণ কর যে,  $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ । [For any three sets A, B and C prove that  $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ .]

(খ) যদি  $a, b$  কোনো গুণাত্মক গ্রুপ  $G$  এর উপাদান হয়, তবে প্রমাণ কর যে,  $(ab)^2 = a^2b^2$  যদি এবং কেবল যদি  $G$  হয় অ্যাবেলিয়ান। [Prove that for any two elements  $a, b$  of a multiplicative group  $G$ ,  $(ab)^2 = a^2b^2$  if and only if  $G$  is abelian.]

১১। প্রমাণ কর যে, কোনো সসীম গ্রুপের উপাদানের ক্রম সসীম এবং উক্ত গ্রুপের ক্রমের সমান অথবা কম। [Prove that the order of every element of a finite group is finite and is less than or equal to order of the group.]

১২। একটি গ্রুপের উপ-গ্রুপের সংজ্ঞা দাও। দেখাও যে, একটি গ্রুপ  $G$  এর অশূন্য উপসেট  $H$  একটি উপগ্রুপ হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি [Define sub-group of a group. Show that a non-empty subset  $H$  of a group  $G$  is a sub-group of  $G$  iff]-

$$(i) a, b \in H \Rightarrow ab \in H$$

$$(ii) a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H, \forall a, b \in H$$

১৩। কোনো গ্রুপের ক্ষেত্রে ১ম সমচিহ্ন নিয়মটি বর্ণনা ও প্রমাণ কর। [State and prove the 1<sup>st</sup> law of isomorphism theorem of a group.]

১৪। মনে কর,  $H$  গ্রুপে  $G$  এর একটি উপ-গ্রুপ যার সূচক ২। তখন দেখাও যে,  $H, G$  এর নরমাল উপ-গ্রুপ। [Let  $H$  be a sub-group of a group  $G$ . If the index of  $H$  in  $G$  is 2 then show that  $H$  is a normal sub-group of  $G$ .]

১৫।  $H$  এবং  $K$ , গ্রুপ  $G$  এর দু'টি সসীম উপগ্রুপ হলে প্রমাণ কর যে,

$$O(HK) = \frac{O(H)O(K)}{O(H \cap K)}$$

যেখানে 'O' ক্রম প্রকাশ করে। [If  $H$  and  $K$  are

two finite sub-groups of a group  $G$  then prove that  $O(HK) = \frac{O(H)O(K)}{O(H \cap K)}$  where 'O' represents order.]

১৬। উপ-রিং এর সংজ্ঞা দাও। প্রমাণ কর যে, একটি রিং  $R$  এর অশূন্য উপসেট  $S, R$  এর উপ-রিং হবে যদি এবং কেবল যদি  $\forall a, b \in S \Rightarrow a - b \in S$  এবং  $ab \in S$ । [Define sub-ring. Prove that a non-empty sub-set  $S$  of a ring  $R$  will be a sub-ring of  $R$  if  $\forall a, b \in S \Rightarrow a - b \in S$  and  $ab \in S$ .]

১৭। প্রমাণ কর যে, পূর্ণসংখ্যার রিং  $\mathbb{Z}$  একটি মুখ্য আইডিয়াল রিং। [Prove that the ring of integer's  $\mathbb{Z}$  is a principal Ideal.]