

NUH-2017

ক বিভাগ

- ১। (ক) সমতুল্য সম্পর্ক সংজ্ঞায়িত কর। [Define equivalence relation.]
- (খ) গ্রুপের উপাদানের ক্রম কাকে বলে? [What is the order of an element of a group?]
- (গ) উপগ্রুপ কাকে বলে? [Define subgroup.]
- (ঘ) কোসেট কী? [What is coset?]
- (ঙ) গ্রুপের কেন্দ্র কী? [What is centre of a group?]
- (চ) রিং এর সংজ্ঞা দাও। [Define ring.]
- (ছ) উপগ্রুপের নর্মালাইজার কাকে বলে? [What is the normalizer of a subgroup?]
- (জ) মুখ্য আইডিয়াল কী? [What is principal ideal?]
- (ঝ) ইন্টিগ্রাল ডোমেনের সংজ্ঞা দাও। [Define integral domain.]
- (ঞ) ইউক্লিডিয় রিং কী? [What is Euclidean ring?]
- (ট) বীজগণিতীয় সম্প্রসারণ কাকে বলে? [What is called algebraic extension?]
- (ঠ) নৈকতলীয় ফিল্ড কী? [What is skew field?]

খ-বিভাগ

- ২। পূর্ণসংখ্যার সেট \mathbb{Z} এর জন্য মডুলো $m(\cong \text{mod } m)$ সাপেক্ষে অনুসমতা সম্পর্ক, সমতুল্য সম্পর্ক হবে। [The congruence modulo $m(\cong m)$ is an equivalence relation in the set \mathbb{Z} of integers.]
- ৩। প্রমাণ কর যে, কোনো গ্রুপে অনুবন্ধী সম্পর্ক একটি সমতুল্য সম্পর্ক। [Prove that, the relation of conjugacy on a group is an equivalence relation.]

- ৪। কোনো গ্রুপের দুটি উপাদান x ও y হলে প্রমাণ কর যে, $0(x) = 0(y^{-1}xy)$ । [If two arbitrary elements of a group are x, y ; then prove that, $0(x) = 0(y^{-1}xy)$.]
- ৫। প্রমাণ কর যে, কোনো গ্রুপের দুটি উপগ্রুপের ছেদও সংশ্লিষ্ট গ্রুপের উপগ্রুপ হবে। [Prove that, the intersection of two subgroups is also a subgroup.]
- ৬। কোনো গ্রুপের একটি উপগ্রুপের সূচক ২ হলে দেখাও যে, উক্ত উপগ্রুপ সংশ্লিষ্ট গ্রুপের নর্মালা উপগ্রুপ। [If the index of a subgroup in group is 2, then show that the subgroup is a normal subgroup.]
- ৭। $f: G \rightarrow G'$ একটি গ্রুপ অনুচিত্রণ হলে দেখাও যে, G' এর উপগ্রুপ হবে $f(G)$ । [Let $f: G \rightarrow G'$ be a group homomorphism. Prove that the homomorphic image $f(G)$ is a subgroup of G' .]
- ৮। কোনো রিং এর প্রত্যেক উপাদান সমঘাতি হলে দেখাও যে, রিংটি বিনিময়ী রিং। [If every element of a ring is idempotent then the ring must be commutative.]
- ৯। প্রমাণ কর যে, প্রত্যেক ফিল্ডের সসীম সম্প্রসারণ একটি বীজগণিতীয় সম্প্রসারণ। [Every finite extension of a field is an algebraic extension of the field.]

গ-বিভাগ

- ১০। দেখাও যে, $G = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$, যেখানে $a \neq 0$ এবং $a \in \mathbb{R}$ আকারের সকল ম্যাট্রিক্স গুণের আবদ্ধ বিধি মেনে চলে। G এর একক উপাদান E হলে E নির্ণয় কর। আরও দেখাও যে, E সাপেক্ষে G এর প্রত্যেক উপাদানের গুণাত্মক বিপরীত উপাদান বিদ্যমান। G গুণের অধীনে গ্রুপ কিনা তা ব্যাখ্যা কর। [Show that G of all matrices of the form $\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$, where a is non-zero real

number, is closed under multiplication of matrices. If E is the unit element of G then find E^{-1} . Also show that every element of G has a unique inverse. Explain if G is a group under multiplication or not.]

১১। উপগ্রুপের মৌলিক উপপাদ্য বর্ণনা ও প্রমাণ কর। [State and prove fundamental theorem of subgroup.]

১২। (ক) একটি সসীম আবিলীয় গ্রুপের উদাহরণ দাও, যা চক্রক্রমিক নয়। [Give an example of a finite abelian group, which is not cyclic.]

(খ) দেখাও যে, মৌলিক ক্রমবিশিষ্ট গ্রুপের কোনো প্রকৃত উপগ্রুপ নেই। [Show that, a group of prime order has no proper subgroup.]

১৩। প্রমাণ কর যে, কোনো গ্রুপের অনুচিত্রিক প্রতিচ্ছবি তার বিভাজন গ্রুপের সাথে সমচিত্রিক। [Show that every homomorphic image of a group is isomorphic to some quotient group of that group.]

১৪। কোনো বিনিময়ী রিং R এর একটি আইডিয়াল A হলে R/A একটি ফিল্ড হবে যদি এবং কেবল যদি A , রিং R এর গুরু আইডিয়াল হয়। [An ideal A of a commutative ring R with unity is maximal if and only if the quotient ring R/A is a field.]

১৫। উপরিং কী? দেখাও যে, কোনো রিং R এর অশূন্যক উপসেট S , উক্ত R এর উপরিং হবে যদি এবং কেবল যদি [What is subring? Show that the non-zero subset S of a ring R will be subring iff]-

$$(i) a, b \in S \Rightarrow a - b \in S$$

$$(ii) a, b \in S \Rightarrow ab \in S$$

১৬। যদি কোনো রিং R বিলোপন এলাকা হয় তবে তার বহুপদী রিং $R[x]$ ও বিলোপন এলাকা হবে। [If R is an integral domain, then so is $R[x]$.]

১৭। (ক) দেখাও যে, কোনো ফিল্ডে বহুপদী রিং মুখ্য আইডিয়াল রিং হবে। [Show that a polynomial ring over an arbitrary field is a principal ideal ring.]

(খ) দেখাও যে, কোনো ফিল্ড F এর উপর $F[x]$ বহুপদী ডোমেন হলে উক্ত ডোমেনের যেকোনো বহুপদী $f(x)$, $(x - a)$ দ্বারা বিভাজ্য হবে যদি $f(a) = 0$ হয়, যেখানে $a \in F$ । [A polynomial $f(x)$ in the polynomial domain $F[x]$

over the field F is divisible by $(x - a)$ for an arbitrary $a \in F$, if $f(a) = 0$.]