NUH-2018

ক-বিভাগ

১। (ক) ক্রমাত্মক জোড় কী? [What is an ordered pair?]

(গ) কোনো গ্রুপে উপগ্রুপের সূচক কী? [What is the index of a subgroup in a group?]

(ঘ) সরল গ্রুপের একটি উদাহরণ দাও। [Give an example of simple group.]

(ঙ) অনুবন্ধী উপাদান সংজ্ঞায়িত কর। [Define conjugate element.]

(চ) ফিল্ডের সংজ্ঞা দাও। [Define a field.]

(ছ) শূন্য ভাজকযুক্ত রিং কী? [What is a ring with zero divisors?]

(জ) একটি চক্র গ্রুপের সৃজক কি? [What is the generator of a cyclic group?]

(ঝ) আইডিয়াল সংজ্ঞায়িত কর। [Define ideal.]

(ঞ) সমচিত্রণ বলতে কি বুঝ? [What do you mean by isomorphism?]

(ট) একটি উপরিং-এর উদাহরণ দাও যা একটি আইডিয়াল নয়। [Give an example of a subring which is not an ideal.]

(ঠ) সম্প্রসারণ ফিল্ডের ডিগ্রী বলতে কী বুঝ? [What do you mean by the degree of an extension field?]

খ-বিভাগ

২। যেকোনো তিনটি সেট A, B এবং C এর জন্য দেখাও যে [For any three sets A, B and C show that],

$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$$

৩। দেখাও যে, একটি সসীম গ্রুপের কোনো উপাদানের ক্রম কখনোই গ্রুপের ক্রম অপেক্ষা অধিক হতে পারে না। [Show that, the order of any element of a finite group can never exceed the order of the group.]

৪। যদি $f=(1\ \ 3\ \ 6\ \ 9\ \ 5)(2\ \ 4\ \ 7)$ এবং $g=(1\ \ 2\ \ 8)(3\ \ 6)(4\ \ 5\ \ 7)$ হয়, তবে gfg^{-1} নির্ণয় কর। [If $f=(1\ \ 3\ \ 6\ \ 9\ \ 5)(2\ \ 4\ \ 7)$ and $g=(1\ \ 2\ \ 8)(3\ \ 6)(4\ \ 5\ \ 7)$, then find gfg^{-1}.]

৫। যদি H এবং K কোনো গ্রুপ G-এর উপগ্রুপ হয়, তাহলে দেখাও যে, HK, G-এর একটি উপগ্রুপ হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি $HK=KH$ হয়। [If H and K are sub-groups of a group G, then show that, HK is a subgroup of G iff $HK=KH$.]

৬। দেখাও যে, কোনো চক্র গ্রুপের প্রত্যেক বিভাজিত গ্রুপ নিজেও চক্র গ্রুপ। [Show that, every factor group of a cyclic group is cyclic.]

৭। দেখাও যে, একটি ফিল্ডের কোনো শূন্য ভাজক নেই। [Show that, a field has no zero divisors.]

৮। দেখাও যে, $\mathbb{Z}$-এর প্রত্যেক আইডিয়াল একটি মূখ্য আইডিয়াল। [Show that, every ideal in $\mathbb{Z}$ is a principal ideal.]

৯। প্রমাণ কর যে, x^2+x+1 বহুপদীটি পূর্ণসংখ্যা মডুলো 2-এর ফিল্ড $\mathbb{Z}_2$-এর উপর অনুৎপাদকীয়। [Prove that, the polynomial x^2+x+1 is irreducible over the field $\mathbb{Z}_2$ of integers modulo 2.]

গ-বিভাগ

১০। (ক) দেখাও যে, সকল পূর্ণসংখ্যার সেট $\mathbb{Z}$ একটি যোগাত্মক গ্রুপ। $\mathbb{Z}$ কি একটি গুণাত্মক গ্রুপ? সত্যতা প্রতিপাদন কর। [Show that, the set $\mathbb{Z}$ of all integers is a group with respect to addition. Is the set $\mathbb{Z}$ a group under multiplication? Justify.]

(খ) প্রমাণ কর যে, কোনো গ্রুপের একটি উপাদানের ক্রম তার বিপরীতকের ক্রমের সমান। [Prove that, the order of an element of a group is the same as that of its inverse.]

১১। (ক) যদি n ক্রমের একটি উপাদান 'a' দ্বারা সৃজিত চক্র গ্রুপ G হয়, তবে দেখাও যে, a^m, G এর একটি সৃজক হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি $m<n$ এবং $(m,n)=1$ হয়। [If a cyclic group G is generated by 'a' of order n then show that, a^m is a generator of G iff $m<n$ and $(m,n)=1$.]

(খ) প্রমাণ কর যে, একটি গ্রুপে ইহার কোনো উপগ্রুপের যেকোনো দুইটি ডান (বা, বাম) কোসেট, হয় নিশ্ছেদ অথবা অভিন্ন হবে। [Prove that, any two right (or, left) cosets of a subgroup in a group are either disjoint or identical.]

১২। যদি H কোনো গ্রুপ G-এর একটি উপগ্রুপ এবং $N(H)=\{x\in G: xHx^{-1}=H\}$ হয়, তবে দেখাও যে [If H be a subgroup of a group G and $N(H)=\{x\in G: xHx^{-1}=H\}$ then show that],

(i) H, $N(H)$ এর একটি অব্যয় উপগ্রুপ [H is a normal subgroup in $N(H)$ and];

(ii) H, G এ অব্যয় হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি $N(H)=G$ হয়। [H is normal in G iff $N(H)=G$.]

১৩। একটি গ্রুপের ক্ষেত্রে দ্বিতীয় সমচিত্রণ নিয়মটি বর্ণনা ও প্রমাণ কর। [State and prove second law of isomorphism theorem of a group.]

১৪। (ক) দেখাও যে, কোনো রিং এর প্রত্যেক আইডিয়াল একটি উপরিং কিন্তু বিপরীতক্রমে তা সত্য নয়। [Show that, every ideal of a ring is subring but the converse is not true.]

(খ) প্রমাণ কর যে, কোনো ফিল্ড একটি সরল রিং। [Prove that, any field is a simple ring.]

১৫। মনে কর, D এককসহ একটি বিনিময় রিং এবং I, D-এর একটি আইডিয়াল। তাহলে দেখাও যে, D/I একটি অখন্ড মণ্ডল হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি D-এর মুখ্য আইডিয়াল I হয়। [Let D be a commutative ring with unity and I be an ideal of D. Then show that, D/I is an integral domain iff I is a prime ideal of D.]

১৬। (ক) একটি রিং এর উদাহরণ দাও, যার প্রত্যেক উপরিং একটি আইডিয়াল। [Give an example of a ring each of whose subrings is an ideal.]

(খ) প্রমাণ কর যে, রিং অনুচিত্রণের কার্নেল ইহার ডোমেনের একটি আইডিয়াল। [Prove that, the Kernel of a ring homomorphism is an ideal of its domain.]

১৭। ইউনিক ফ্যাক্টোরাইজেশন উপপাদ্যটি বর্ণনা ও প্রমাণ কর। [State and prove the unique factorization theorem.]