

NUH-2019

ক-বিভাগ

- ১। (ক) চক্র গ্রুপ কী? [What is a cyclic group?]
- (খ) বিন্যাস $\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ জোড় না বিজোড়? [Is the permutation $\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ even or odd?]
- (গ) গ্রুপ G এর দুটো উপগ্রুপ P ও Q যাদের ক্রম যথাক্রমে 6 ও 11, তাহলে $O(P \cap Q)$ কত? [Two subgroups P and Q of group G whose order are 6 and 11 respectively, then what is $O(P \cap Q)$?]
- (ঘ) $\text{Hom}(Z_2, Z_3)$ কী? [What is $\text{Hom}(Z_2, Z_3)$?]
- (চ) Z/PZ , যেখানে P মৌলিক, ফিল্ড কিনা? [Whether Z/PZ , where P is prime, is field or not?]
- (ছ) কোন উপপাদ্যের সাহায্যে আমরা গ্রুপ ও এর উপগ্রুপের ক্রমের মধ্যকার সম্পর্ক পাই? [By which theorem we get a relation between the order of a group and its subgroup?]
- (জ) প্রাইম আইডিয়াল এর সংজ্ঞা কী? [What is the definition of prime ideal?]
- (ঝ) একটি অনুচিত্রণের কার্নেল কী পরিমাপ করে? [What does measure the kernel of a homomorphism?]
- (ঞ) গ্রুপ G এর সর্বদা অব্যয় (Normal) উপজগত দুটো কী? [What are the two normal subgroups of group G always?]
- (ট) গ্রুপ G এর উপজগত H হলে G -এ H এর সূচক বলতে কী বুঝায়? [If H is a subgroup of G then what does it mean by index of H in G ?]
- (ঠ) সম্প্রসারণ ফিল্ডে $[Q^{\sqrt[3]{2}}:Q]$ এর মান কত? [What is the value of $[Q^{\sqrt[3]{2}}:Q]$ in extension field?]

খ-বিভাগ

- ২। ধরা যাক, $(G, *)$ একটি গ্রুপ ও $x, y \in G$ তাহলে দেখাও যে [Let $(G, *)$ be a group and $x, y \in G$ then show that],
- $$(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$$

- ৩। দেখাও যে, একটি সসীম গ্রুপের প্রত্যেক উপাদানের ক্রম সসীম। [Show that the order of every element of a finite group is finite.]
- ৪। দেখাও যে, $a * b = \frac{ab}{3}$ প্রক্রিয়ার অধীনে Q^+ একটি গ্রুপ গঠন করে। [Show that Q^+ forms a group under the binary operation, $a * b = \frac{ab}{3}$.]
- ৫। যদি a একটি চক্র গ্রুপ G এর সৃজক হয় তবে a^{-1} ও G এর সৃজক হবে-প্রমাণ কর। [If 'a' is the generator of a cyclic group G then prove that a^{-1} also be the generator of G .]
- ৬। ধরা যাক, $G = \langle a \rangle$ একটি চক্রগ্রুপ যার ক্রম 4 ও $H = \{1, a^2\}$ একটি উপগ্রুপ। $[G:H]$ সূচক নির্ণয় কর। [Suppose $G = \langle a \rangle$ is a cyclic group whose order is 4 and $H = \{1, a^2\}$ is a subgroup. Find index $[G:H]$.]
- ৭। প্রমাণ কর যে, একটি ফিল্ডের কোনো প্রকৃত আইডিয়াল নাই। [Prove that a field has no proper ideal.]
- ৮। যদি R একটি রিং ও a, b এর দুটো উপাদান হয় তবে দেখাও যে, $(-a)(-b) = ab$ । [If R is a ring and a, b be two elements of R then show that $(-a)(-b) = ab$.]
- ৯। প্রমাণ কর যে, ফিল্ডের বিভাজন হলো বীজগাণিতিক সম্প্রসারণ। [Prove that splitted fields are algebraic extension.]

গ-বিভাগ

- ১০। (ক) ধরা যাক, G একটি গ্রুপ। যদি a ও x , G এর দুটো ইচ্ছামূলক উপাদান হয় তবে দেখাও যে, $0(a) = 0(x^{-1}ax)$ । [Let G be a group. If a and x are two arbitrary elements then show that $0(a) = 0(x^{-1}ax)$.]
- (খ) ধরা যাক, H , গ্রুপ G এর একটি অশূন্য উপসেট। তখন H উপগ্রুপ হবে যদি এবং কেবল যদি $xy^{-1} \in H, \forall x, y \in H$ হয়। [Let H be a non-empty subset then H will be a subgroup if and only if $xy^{-1} \in H, \forall x, y \in H$.]

- ১১। (ক) প্রমাণ কর যে, চক্রাকার গ্রুপের প্রতিটি উপগ্রুপ চক্রাকার। [Prove that every subgroup of a cyclic group is cyclic.]
(খ) দেখাও যে, একটি গ্রুপ G এর দুটি নর্মাল উপগ্রুপ H এবং K এর ছেদক $H \cap K$ একটি নর্মাল উপগ্রুপ। [Show that intersection of two normal subgroups H and K , $H \cap K$ of group G is normal subgroup.]
- ১২। ল্যাগ্রাঞ্জ-এর উপপাদ্য বিবৃত ও প্রমাণ কর। দেখাও যে, এর বিপরীত উক্তিটি সবসময় সত্য নয়। [State and prove Lagrange's theorem. Show that the converse is not always true.]
- ১৩। প্রমাণ কর যে, গ্রুপ অনুচিত্রণের ক্ষেত্রে সৃষ্ট কার্নেল উহার ডোমেন-এর একটি নর্মাল উপগ্রুপ এবং রেঞ্জ উহার কো-ডোমেনের একটি উপগ্রুপ। [Prove that the kernel of a group homomorphism is a normal subgroup of its domain and range is a subgroup of its co-domain.]
- ১৪। প্রমাণ কর যে, কোনো গ্রুপ G এর হোমোমরফিক প্রতিচ্ছবি এর কোনো কোসেট গ্রুপের সাথে আইসোমরফিক। [Prove that every homomorphic image of a group G is isomorphic to some quotient group of G .]
- ১৫। যদি R এর একটি আইডিয়াল A হয় তবে দেখাও যে, R/A একটি ফিল্ড হবে যদি এবং কেবল যদি A , R এর ম্যাক্সিমাল আইডিয়াল হয়। [If A is an ideal of R then show that R/A is a field if and only if A is the maximal ideal of R .]
- ১৬। দেখাও যে, প্রতিটি ইন্টিগ্রাল ডোমেন ফিল্ড। [Show that every integral domain is a field.]
- ১৭। যদি R একটি ইন্টিগ্রাল ডোমেন হয় তবে দেখাও যে, $R[x]$ ও একটি ইন্টিগ্রাল ডোমেন। [If R is an integral domain then show that $R[x]$ also be an integral domain.]