

## NUH-2022

## ক-বিভাগ

- ১। (ক) দ্বিপদী সম্পর্ক কী? [What is binary relation?]  
 (খ) বীজগণিতীয় সংযুতির সংজ্ঞা দাও। [Define algebraic structure.]  
 (গ) একটি গ্রুপের একটি উপাদানের ক্রমের সংজ্ঞা দাও। [Define order of an element of a group.]  
 (ঘ) কোসেট কী? [What is coset?]  
 (ঙ) প্রতিসম গ্রুপ সংজ্ঞায়িত কর। [Define symmetric group.]  
 (চ) কোনো গ্রুপে উপগ্রুপের সূচক কী? [What is index of a subgroup in a group?]  
 (ছ) শূন্য ভাজকযুক্ত রিং কী? [What is a ring with zero divisors?]  
 (জ) মুখ্য আইডিয়াল কী? [What is a principal ideal?]  
 (ঝ) রিং বলতে কী বুঝ? [What is meant by a ring?]  
 (ঞ) মৌলিক আইডিয়ালের সংজ্ঞা দাও। [Define prime ideal.]  
 (ট) ইউক্লিডীয় রিং কী? [What is Euclidean ring?]  
 (ঠ) ফিল্ডের বীজগাণিতিক সম্প্রসারণের সংজ্ঞা দাও। [Define algebraic extension of a field.]

## খ-বিভাগ

- ২। যদি  $S = \{x, y, z\}$  হয়, তবে দেখাও যে,  $S$ -এর উপর  $S \times S$  একটি সমতুল্যতা সম্পর্ক। [If  $S = \{x, y, z\}$  then show that,  $S \times S$  is an equivalence relation on  $S$ .]  
 ৩। প্রমাণ কর যে, ৪ ক্রমের প্রত্যেক গ্রুপ অ্যাবেলিয়ান গ্রুপ। [Prove that, every group of order 4 is an abelian group.]

- ৪। দেখাও যে, চক্র গ্রুপের প্রত্যেক উপগ্রুপ চক্রক্রমিক। [Show that, every subgroup of a cyclic group is cyclic.]  
 ৫। প্রমাণ কর যে, একটি গ্রুপে ইহার কোনো উপগ্রুপের যে কোনো দুইটি ডান (বাম) কোসেট, হয় নিশ্চেষ্ট অথবা অভিন্ন। [Prove that, any two right (left) cosets of a subgroup of a group are either disjoint or identical.]  
 ৬। ধর,  $f : G \rightarrow G'$  একটি গ্রুপ অনুচিত্রণ। তাহলে দেখাও যে, কার্ণেল  $f$ ,  $G$  এর একটি অব্যয় উপগ্রুপ। [Let  $f : G \rightarrow G'$  be a group homomorphism. Then show that, kernel  $f$  is a normal subgroup of  $G$ .]  
 ৭। প্রমাণ কর যে, সকল পূর্ণসংখ্যার রিং একটি মুখ্য আইডিয়াল। [Prove that, the ring of all integers is a principal ideal.]  
 ৮। দেখাও যে,  $x^2 + x + 1$  বহুপদীটি পূর্ণসংখ্যা মডুলো ২ এর ফিল্ড  $\mathbb{Z}_2$  এর উপর অনুৎপাদকীয়। [Show that, the polynomial  $x^2 + x + 1$  is irreducible over the field  $\mathbb{Z}_2$  of integers modulo 2.]  
 ৯। দেখাও যে, পৃথকীকরণ ফিল্ড বীজগাণিতিক সম্প্রসারণ। [Show that, splitting fields are algebraic extension.]

## গ-বিভাগ

- ১০। প্রমাণ কর যে, সকল পূর্ণসংখ্যার সেট  $\mathbb{Z}$  বাইনারি প্রক্রিয়া  $*$  এর সাপেক্ষে একটি অসীম অ্যাবেলিয় গ্রুপ গঠন করে, যেখানে  $x * y = x + y + 1$ ;  $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ . [Prove that, the set  $\mathbb{Z}$  of all integers is an infinite abelian group w.r.to the binary operation  $*$  defined by  $x * y = x + y + 1$ ;  $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ .]

- ১১। (ক) যদি  $n$  ক্রমের একটি উপাদান 'a' দ্বারা সৃজিত চক্রগুপ  $G$  হয়, তবে দেখাও যে,  $a^m$ ,  $G$  এর একটি সৃজক হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি  $m < n$  এবং  $(m, n) = 1$  হয়। [If a cyclic group  $G$  is generated by 'a' of order  $n$ , then show that,  $a^m$  is a generator of  $G$  if and only if  $m < n$  and  $(m, n) = 1$ .]
- (খ) যদি  $H$  এবং  $K$  কোনো অ্যাবেলিয়ান গ্রুপ  $G$  এর দুইটি উপগ্রুপ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,  $HK$  ও  $G$  এর একটি উপগ্রুপ। [If  $H$  and  $K$  are two subgroups of an abelian group  $G$ , then prove that,  $HK$  is also a subgroup of  $G$ .]
- ১২। দেখাও যে, প্রত্যেক সসীম গ্রুপ  $G$  বিন্যাস গ্রুপের সমচিত্রিক। [Show that, every finite group  $G$  is isomorphic to a permutation group.]
- ১৩। (ক) দেখাও যে, কোনো গ্রুপ  $G$  এর একটি উপগ্রুপ  $H$  এর সূচক ২ একটি অব্যয় উপগ্রুপ। [Show that, a subgroup  $H$  of index 2 in a group  $G$  is a normal subgroup.]
- (খ) ধর,  $f: G \rightarrow G'$  একটি গ্রুপ অনুচিত্রণ। তবে দেখাও যে, অনুচিত্রিক প্রতিচ্ছায়া  $f(G)$ ,  $G'$  এর একটি উপগ্রুপ। [Let  $f: G \rightarrow G'$  be a group homomorphism. Then show that, the homomorphic image  $f(G)$  is a subgroup of  $G'$ .]
- ১৪। (ক) প্রমাণ কর যে, কোনো অখন্ড মণ্ডলের বৈশিষ্ট্য হয় শূন্য অথবা একটি মৌলিক সংখ্যা। [Prove that, the characteristic of an integral domain is either zero or a prime number.]
- (খ) দেখাও যে, একটি রিং শূন্য ভাজকবিহীন হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি ইহাতে বর্জন বিধি খাটে। [Show that, a ring is without zero divisors iff the cancellation laws hold in it.]

- ১৫। মনে কর, কোনো রিং  $R$  এর  $S$  একটি আইডিয়াল। তাহলে দেখাও যে,  $R/S$  একটি রিং। [Let  $S$  be ideal of a ring  $R$ . Then show that,  $R/S$  is a ring.]
- ১৬। রিং সমচিত্রণের প্রথম উপপাদ্য বর্ণনা ও প্রমাণ কর। [State and prove first law of ring isomorphism.]
- ১৭। (ক) দেখাও যে, প্রত্যেক সসীম সম্প্রসারণ ফিল্ড বীজগাণিতিক সম্প্রসারণ। [Show that, every finite extension of a field is an algebraic extension.]
- (খ) প্রমাণ কর যে, প্রত্যেক ইউক্লিডীয় রিং মুখ্য আইডিয়াল রিং। [Prove that, each Euclidean ring is a principal ideal ring.]