# NUMSc-2019

## ক-বিভাগ

১। (ক) লিপসিজ ধ্রুবকের সংজ্ঞা দাও। [Define Lipschitz constant.]

(খ) $R=\{(x,y):|x|\le 2,|y-1|\le 3\}$ দ্বারা বর্ণিত আয়তকার অঞ্চলটি অঙ্কন কর। [Draw the rectangular region defined by $R=\{(x,y):|x|\le 2,|y-1|\le 3\}$.]

(গ) একটি আদিমান সমস্যার উদাহরণ দাও। [Give an example of an initial value problem.]

(ঘ) পার্থক্য কার্নেল কী? [What is the difference kernel?]

(ঙ) অরৈখিক যোগজ সমীকরণ কী? [What is a non-linear integral equation?]

(চ) সুষম সুস্থিতি কাকে বলে? [What is called uniform stability?]

(ছ) দ্বিতীয় প্রকারের সমমাত্রিক ভলতেরা যোগজ সমীকরণটি লেখ। [Write down the homogeneous volterra integral equation of second kind.]

(জ) মৌল সেট বলতে কী বোঝায়? [What is meant by a fundamental set?]

(ঝ) পুনরাবৃত্ত কার্নেল ও রিজলভেন্ট কার্নেলের মধ্যে সম্পর্ক লেখ। [Write down the relation between iterated Kernel and resolvent Kernel.]

(ঞ) স্টার্ম-লিউভিল সীমামান সমস্যা কী? [What is Sturm-Liouville boundary value problem?]

(ট) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির আইগেন মানসমূহ নির্ণয় কর। [Find the eigen values of the matrix $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.]

(ঠ) রৈখিক যোগজ সমীকরণের অধিকতর সাধারণ আকারটি লেখ। [Write down the most general type of the linear integral equation.]



## খ-বিভাগ

২। দেখাও যে, $xy$ সমতলে একটি আবদ্ধ এলাকা $R=\{(x,y):|x|\le a,|y-y_0|\le b\}$ তে $f(x,y)=xy^2, \forall(x,y)$ ফাংশনটি লিপসিজ শর্ত সিদ্ধ করে। [Show that, the function $f(x,y)=xy^2, \forall(x,y)$ statistics the Lipschitz condition on any bounded region $R=\{(x,y):|x|\le a,|y-y_0|\le b\}$ of the $xy$-plane.]

৩। পিকার্ডের পর্যায়ক্রমিক আসন্নীকরণ পদ্ধতিতে আদিমান সমস্যা $\frac{dy}{dx}=x+y^2,\ y(0)=0$ এর প্রথম তিনটি আসন্ন সমাধান নির্ণয় কর। [Using Picard's method of successive approximations find the first three approximate solutions of the initial value problem $\frac{dy}{dx}=x+y^2,\ y(0)=0$.]

৪। প্রমাণ কর যে, সমমাত্রিক যোগাশ্রয়ী ভেক্টর অন্তরক সমীকরণ $x'(t)=A(t)x$ (যেখানে $A(t)$ একটি অবিচ্ছিন্ন ম্যাট্রিক্স ফাংশন) এর একটি মৌল সমাধান সেট বিদ্যমান। [Prove that, there exists a fundamental set of solutions of the homogeneous linear vector differential equation $x'(t)=A(t)x$ (where $A(t)$ is a continuous matrix function).]

৫। $x'(t)=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}x$ সমীকরণের শূন্য সমাধানের স্থিতিশীলতা পরীক্ষা কর। [Examine the stability of the zero solution of the equation $x'(t)=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}x$.]

৬। দেখাও যে, $u(x)=(1+x^2)^{-3/2}$ হলে এটি $u(x)=\frac{1}{1+x^2}-\int_0^x \frac{y}{1+x^2}u(y)\,dy$ সমীকরণের একটি সমাধান। [Show that, $u(x)=(1+x^2)^{-3/2}$ is a solution of $u(x)=\frac{1}{1+x^2}-\int_0^x \frac{y}{1+x^2}u(y)\,dy$.]

## খ-বিভাগ

৭। সমাধান কর [Solve]: $\phi(x) = \sin x + \lambda \int_4^{10} x\phi(\xi)\, d\xi$

৮। নিচের ফ্রেডহোম যোগজ সমীকরণটি সমাধান কর [Solve the following Fredholm integral equation]:

$$\phi(x) = x + \lambda \int_0^{\pi} (1 + \sin x \sin t)\, \phi(t)\, dt$$

৯। $y'' + \lambda y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(\pi) = 0,\ \lambda > 0$ স্টার্ম-লিউভিল সমস্যাটির আইগেন মান ও অনুসারী আইগেন ফাংশন নির্ণয় কর। [Find the eigen values and the corresponding eigen functions of the Sturm-Liouville problem $y'' + \lambda y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(\pi) = 0,\ \lambda > 0$.]

## গ-বিভাগ

১০। দেখাও যে, আদিমান সমস্যা $x' = 4x^{3/4},\ x(0) = 1$ এর অনন্য সমাধান রয়েছে কিন্তু আদিমান সমস্যা $x' = 4x^{3/4},\ x(0) = 0$ এর অসীম সংখ্যক সমাধান রয়েছে। [Show that, the initial value problem $x' = 4x^{3/4},\ x(0) = 1$ has a unique solution, but the initial value problem $x' = 4x^{3/4},\ x(0) = 0$ has infinitely many solutions.]

১১। কসি-পিয়ানোর অস্তিত্ববাদ উপপাদ্যের বর্ণনা ও প্রমাণ কর। [State and prove Cauchy-Peano existence theorem.]

১২। নিচের সমমাত্রিক যোগাশ্রয়ী অন্তরক সমীকরণ জোটের মৌল (fundamental) ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করে সমাধান কর [Solve the following homogeneous linear differential equation computing fundamental matrix]:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix} x$$

১৩। দ্বিতীয় প্রকারের ভলতেরা যোগজ সমীকরণের অনন্য সমাধান বিদ্যমানতার প্রয়োজনীয় শর্তাবলি বর্ণনাসহ প্রমাণ কর। [State and prove the set of conditions that ensure the existence of a unique solution of the Volterra integral equation of second kind.]



১৪। $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$ আদিমান সমস্যাটিকে একটি যোগজ সমীকরণে রূপান্তর কর। অতঃপর এর সমাধান কর ও সমাধানের সত্যতা যাচাই কর। [Convert the initial value problem $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$ into an integral equation. Hence solve it and verify the result.]

১৫। $\phi(x) = \cos 3x + \lambda \int_0^{\pi} \cos(x+y)\phi(y)\, dy$ যোগজ সমীকরণটির আইগেন মান ও আইগেন ফাংশন নির্ণয় কর। [Find the eigen values and eigen functions of the integral equation $\phi(x) = \cos 3x + \lambda \int_0^{\pi} \cos(x+y)\phi(y)\, dy$.]

১৬। ভলতেরা যোগজ সমীকরণ $\phi(x) = \sin x + 2\int_0^{x} e^{x-s}\phi(s)\, ds$ এর রিজলভেন্ট কার্নেল এবং সমাধান নির্ণয় কর। [Find the resolvent Kernel and solution of the Volterra integral equation $\phi(x) = \sin x + 2\int_0^{x} e^{x-s}\phi(s)\, ds$.]

১৭। $y'' - y = t^2,\ y(0) = 0,\ y(1) = 0$ সীমামান সমস্যাটির গ্রীন ফাংশন গঠন কর এবং ইহা ব্যবহার করে তার সমাধান কর। [Construct Green's function for the boundary value problem $y'' - y = t^2,\ y(0) = 0,\ y(1) = 0$ and use it to find the solution for the same.]