

NUH-2022

ক-বিভাগ

- ১। (ক) বাস্তব সংখ্যার স্বতঃসিদ্ধগুলো কী কী? [What are the axioms of real numbers?]
- (খ) উন্মুক্ত সেটের সংজ্ঞা দাও। [Define an open set.]
- (গ) বিচ্ছিন্ন বিন্দু বলতে কী বুঝ? [What is isolated point of a set?]
- (ঘ) কসি অনুক্রমের সংজ্ঞা দাও। [Define Cauchy sequence.]
- (ঙ) একমুখী অনুক্রম বলতে কী বুঝ? [What is monotonic sequence?]
- (চ) পর্যায়ক্রমিক ধারা কাকে বলে? [What is the alternating series?]
- (ছ) হাইপার হারমোনিক P ধারাটি লিখ। [Write hyper harmonic P - series.]
- (জ) সুষম অবিচ্ছিন্নতা বলতে কী বুঝ? [Define removable discontinuity.]
- (ঝ) $f(x)$ ফাংশনে রোলের উপপাদ্য অকার্যকর হওয়ার শর্ত লিখ। [When Rolle's theorem is not applicable to the function $f(x)$?]
- (ঞ) বন্ধ ব্যবধির বিভাজন কী? [What do you mean by partition of closed interval?]
- (ট) ইন্টিগ্র্যাল ক্যালকুলাসের মৌলিক উপপাদ্যটি লিখ। [Write down the fundamental theorem of integral calculus.]
- (ঠ) ট্রিভিয়াল মেট্রিক্স বলতে কী বুঝ? [What is trivial metric?]

খ-বিভাগ

- ২। প্রমাণ কর যে, দুটি ভিন্ন বাস্তব সংখ্যার মধ্যে সর্বদাই একটি মূলদ সংখ্যা বিদ্যমান এবং ফলশ্রুতিতে অসংখ্য মূলদ সংখ্যা বিদ্যমান। [Prove that between any two distinct real numbers, there is always a rational number and therefore infinitely many rational numbers.]

- ৩। নিম্নবর্ণিত সেটটির সুপ্রিমাম ও ইনফিমাম নির্ণয় কর [Determine the supremum and infimum of the following set]:

$$\left\{ \frac{1}{m} + \frac{1}{n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

- ৪। প্রমাণ কর যে, কোনো সেট আবদ্ধ হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি ইহার পূরক সেট উন্মুক্ত হয়। [Prove that a set is closed iff its complement is open.]
- ৫। দেখাও যে, প্রত্যেক অভিসারী অনুক্রমের একটি অনন্য সীমা বিদ্যমান। [Prove that every convergent sequence has a unique limit.]
- ৬। যদি একটি ধারা $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ অভিসারী হয়; তবে প্রমাণ কর যে, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, তুমি কি মনে কর এর বিপরীত প্রতিপাদ্যটি সত্য? তোমার উত্তরের স্বপক্ষে যুক্তি দাও। [If the series $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ is convergent, then prove that $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. Is the converse of the above statement true? Justify your answer.]
- ৭। দেখাও যে, $f(x) = \frac{1}{x}$ ফাংশনটি $[1, \infty)$ ব্যবধিতে সুষমভাবে অবিচ্ছিন্ন। [Show that $f(x) = \frac{1}{x}$ is uniformly continuous in $[1, \infty)$.]
- ৮। দেখাও যে, ক্রমবর্ধমান ফাংশনই রীম্যান যোগজকরণযোগ্য। [Show that every monotonic function is Riemann integrable.]
- ৯। মনে করি, (x, d) একটি মেট্রিক জগত এবং $x, x', y, y' \in x$ । দেখাও যে, [Let (x, d) be a metric space and $x, x', y, y' \in x$. Show that,]
- $$|d(x, y) - d(x', y')| \leq d(x, x') + d(y, y')$$

গ-বিভাগ

- ১০। প্রমাণ কর যে, যে কোনো দুটি বাস্তব সংখ্যার মধ্যে অসংখ্য অমূলদ সংখ্যা বিদ্যমান। [Prove that, between any two different real numbers there are infinitely many irrational numbers.]

১১। বোলজানো ভায়াস্ট্রাস এর উপপাদ্যটি বিবৃত ও প্রমাণ কর। [State and prove Bolzano-Weierstrass theorem.]

১২। দেখাও যে, $\langle S_n \rangle$ যেখানে $S_1 = \sqrt{2}$ এবং $S_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{S_n}}$, $n \geq 1$ অভিসারী। উহার সীমা শনাক্ত কর। [Show that the sequence $\langle S_n \rangle$, where $S_1 = \sqrt{2}$ and $S_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{S_n}}$, $n \geq 1$ is convergent. Identify the limit.]

১৩। রোল-এর উপপাদ্যটি বর্ণনা এবং প্রমাণ কর। এর ব্যর্থতাগুলো কী কী? [State and prove Rolle's theorem. What are its failure?]

১৪। নিচের ধারাগুলোর যে কোনো দুটির অভিসারিতা পরীক্ষা কর [Test the convergence (any two) of]:

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$$

$$(ii) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}$$

$$(iii) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n + \sqrt{n}}{2n^3 - 1}$$

১৫। দেখাও যে, $d(x, y) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$; $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

দ্বারা সংজ্ঞায়িত d সহ সকল n -পলের জগত \mathbb{R}^n একটি মেট্রিক জগত। [Show that the space \mathbb{R}^n of all ordered

n -tuple with the function d defined by $d(x, y) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$;

$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ is a metric space.]

১৬। (ক) প্রমাণ কর যে, যদি $f(x)$ ফাংশনটি $[a, b]$ বদ্ধ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন হয় তবে $f(x)$ ফাংশনটি $f(a)$ থেকে $f(b)$ পর্যন্ত সকল মান কমপক্ষে একবার অর্জন করে। [Prove that if a function is continuous in a closed interval $[a, b]$, then the function $f(x)$ attains all the values between $f(a)$ and $f(b)$ at least once in the interval.]

(খ) দেখাও যে, প্রত্যেক অন্তরীকরণযোগ্য ফাংশনই অবিচ্ছিন্ন কিন্তু উহার বিপরীত উক্তি সত্য নাও হতে পারে। [Prove that every derivable function is continuous but the converse is not necessarily true.]

১৭। (ক) প্রমাণ কর যে, প্রত্যেক পরম অভিসারী ধারা অভিসারী। [Prove that every absolutely convergent series convergent.]

(খ) ধারাগুলোর অভিসৃতি পরীক্ষা কর [Test the convergence of the series]:

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1} x^{n-1}}{n}$$

এবং [and] (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n\sqrt{n}}$