1A.4 কর্মকৌশল গবেষণার বৈশিষ্ট্য (Characteristics of Operations Research)

1. কর্মকৌশল গবেষণায় সর্বোত্তম সমাধান পাওয়ার জন্য সাধারণত মিশ্র প্রতিভাযুক্ত দল গঠন করা হয় - যদিও এ ধরণের দল গঠন বাধ্যতামূলক নয়।
2. কর্মকৌশল গবেষণায় সর্বোত্তম সমাধান পর্যন্ত পৌছানোর জন্য বৈজ্ঞানিক পদ্ধতি ব্যবহার করা হয়।
3. কর্মকৌশল গবেষণায় গুরুত্বপূর্ণ উপাদানসমূহের সবগুলোই বিবেচনা করা হয়।
4. কর্মকৌশল গবেষণায় মুনাফা সর্বোচ্চ ও ক্ষতি সর্বনিম্ন করার মাধ্যমে চূড়ান্ত ফলাফলকে সর্বোত্তম করার চেষ্টা করা হয়।
5. কর্মকৌশল গবেষণা মন্দ ফলাফলসমূহ হতে এমন একটি সমাধান প্রদান করে যখন ঐ পদ্ধতি অনুসরণ না করলে অধিকতর মন্দ ফলাফল পাওয়া যেত। অর্থাৎ কর্মকৌশল গবেষণা ফলাফলের মান উন্নয়ন ঘটায়।
6. কর্মকৌশল গবেষক সেই সকল উপাদান নির্ণয় ও পরিমাপ করার চেষ্টা করেন যে সকল উপাদান কাঙ্খিত বিষয়বস্তুকে প্রভাবিত করে। এই সকল পরিমাপ ব্যবহার করে একটি সাধারণীকৃত পদ্ধতি গঠন করা হয়। কর্মকৌশল গবেষণায় বিশ্লেষণ ও প্রতিপাদন অপেক্ষা পরীক্ষণ ও আরোহ পদ্ধতি অধিক ব্যবহৃত হয়।
7. কর্মকৌশল গবেষণার প্রথম বিবেচ্য বিষয় হলো সিদ্ধান্ত গ্রহণ।
8. কর্মকৌশল গবেষণার মাধ্যমে পরিমাণগত সমাধান পাওয়া যায়। ফলে সমাধান পাওয়ার জন্য কর্মকৌশল গবেষণায় ব্যাপকভাবে কম্পিউটার ব্যবহার করা হয়।

NUMS 18

1A.5 কর্মকৌশল গবেষণার প্রয়োজনীয়তা (Necessity of Operations Research)

যুদ্ধক্ষেত্রে সীমিত সমরাস্ত্র ব্যবহার করে প্রতিপক্ষের সর্বাধিক ক্ষয়ক্ষতি সাধনের উদ্দেশ্যে কর্মকৌশল গবেষণার সূত্রপাত হয়। যুদ্ধক্ষেত্রে যথোপযুক্ত সিদ্ধান্ত গ্রহণ করা অতীব গুরুত্বপূর্ণ হলেও ধীরে ধীরে শিল্পক্ষেত্রে তার ব্যাপক প্রয়োজনীয়তা অনুভূত হয়। শিল্পক্ষেত্রে কর্মকৌশল গবেষণা ব্যবহারের কারণগুলো নিম্নরূপঃ

(i) **জটিলতা (Complexity):** শিল্পক্ষেত্রে সিদ্ধান্ত গ্রহণে প্রভাব বিস্তারকারী উপাদানসমূহ ধীরে ধীরে বৃদ্ধি পেয়েছে। এই উপাদানসমূহ পরস্পরকে প্রভাবিত করে সিদ্ধান্ত গ্রহণ প্রক্রিয়াকে জটিল করে তোলে। ফলে বাস্তবসম্মত কিন্তু সাশ্রয়ী এমন সমাধান খুজে পাওয়া অত্যন্ত দূরুহ হয়ে যায়। এই ধরণের সমস্যা সমাধান করার জন্য গাণিতিক মডেল গঠন করাই যুক্তিযুক্ত যা সমস্যাটির সর্বোত্তম সমাধান দেওয়ার পাশাপাশি জটিল অবস্থা বিশ্লেষণ করতে সহায়তা করে।

CamScanner

1A.7 কর্মকৌশল গবেষণার সমস্যাসমূহের শ্রেণিবিভাগ (Classification of the problems in Operations Research)

Q. অপারেশন রিসার্চের সমস্যাসমূহের শ্রেণিবিভাগ কর। [Classify the problems in operation research.] 2019 *[NUMSc-12, 14]*, 19

নানাবিধ বৈশিষ্ট্যের প্রেক্ষিতে কর্মকৌশল গবেষণার সমস্যাসমূহকে নিম্নরূপে শ্রেণিবিভাগ করা যায়:

(i) সমস্যার গঠন (Structure of the problem)

(a) প্রতিরূপীয়/ভৌত মডেল (Iconic/Physical model): কোনো বস্তুকে ভিন্ন স্কেল অথবা আদর্শ আকারে উপস্থাপনের মাধ্যমে প্রতিরূপীয় বা ভৌত মডেল গঠন করা হয়। অর্থাৎ এই মডেলে বস্তুর গুণাবলী অপরিবর্তিত রেখে বস্তুর প্রতিরূপের আকার হ্রাস বা বৃদ্ধি ঘটানো হয়।

উদাহরণ: ফটোগ্রাফ, ড্রয়িং, নকশা, পেইন্টিং ইত্যাদি।

(b) সদৃশ/পরিকল্পিত মডেল (Analogue/Schematic model):
সদৃশ বা পরিকল্পিত মডেল হলো এমন একটি মডেল যা কোনো বস্তু বা জোটের ধর্ম হতে ভিন্ন একগুচ্ছ ধর্ম উপস্থাপন করে। মূল মডেল সমাধান করার পর নতুন ধর্মসমূহের মাধ্যমে মূল বস্তুর ধর্মসমূহের পুনর্ব্যাখ্যা প্রদান করা হয়।

উদাহরণ: লেখচিত্র, মানচিত্র ইত্যাদি।

(c) প্রতিকী/গাণিতিক মডেল (Symbolic/Mathematical model):
প্রতিকী/গাণিতিক মডেল হলো এমন একটি মডেল যেখানে কোনো বস্তু বা জোটের সিদ্ধান্ত চলকসমূহ প্রকাশ করার জন্য একগুচ্ছ প্রতীক ব্যবহার করা হয়। এ ধরণের মডেলে সিদ্ধান্ত চলকসমূহের মধ্যবর্তী সম্পর্ককে একগুচ্ছ সমীকরণ বা অসমতার মাধ্যমে উপস্থাপন করা হয়। কর্মকৌশল গবেষণায় এই মডেল ব্যাপকভাবে ব্যবহৃত হয়।

উদাহরণ: যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামিং সমস্যা (LPP)।

CamScanner

প্রত্যেকটির সম্ভাব্যতা তার পূর্ববর্তীটির উপর নির্ভরশীল। চলকের বর্তমান আচরণ বিবেচনা করে এই মডেলে ভবিষ্যৎ আচরণ অনুমান করা হয়।

11. **সমন্বিত কর্মকৌশল মডেল (Combined OR models)**
কখনো কখনো কর্মকৌশল গবেষণার সমস্যা আলোচনা করতে গেলে উপরে বর্ণিত মডেলগুলোর কয়েকটি মিলিয়ে নতুন মডেল গঠনের প্রয়োজনীয়তা দেখা দেয়। এক্ষেত্রে একাধিক মডেলের মিশ্রণের মাধ্যমে একটি সমন্বিত মডেল তৈরি করা হয়।

1A.9 কর্মকৌশল গবেষণার সমস্যাসমূহ সমাধানের বিভিন্ন ধরণের কৌশল (Various types of techniques for solving problems of Operations Research)

Q. অপারেশন রিসার্চের সমস্যাসমূহের সমাধানে ব্যবহৃত বিভিন্ন কৌশলসমূহ বর্ণনা কর। [Describe the various techniques for solving the problems of operation research.] *[NUMSc-12, 14]*

কর্মকৌশল গবেষণার মডেলসমূহকে সাধারণভাবে নিম্নের তিনটি পদ্ধতির মাধ্যমে সমাধান করা হয়:

(a) বৈশ্লেষিক বা প্রতিপাদনধর্মী পদ্ধতি (Analytic or deductive methods)
এই পদ্ধতিতে চূড়ান্ত সমাধান নির্ণয়ের জন্য গাণিতিক প্রতীকযুক্ত সমীকরণসমূহকে নানাবিধ প্রতিপাদনধর্মী কৌশল প্রয়োগ করা হয়। এই পদ্ধতিতে সাধারণত লেখচিত্র, অন্তরীকরণ, সমাকলন, সসীম ব্যবধান ইত্যাদি ব্যবহার করা হয়।

....

ধাপ-10: $c_j - E_j$ সারি গণনা করি, যেহেতু সকল কলামের নীচের $c_j - E_j$ সহগসমূহ ঋণাত্মক অথবা শূন্য এবং b_2 ঋণাত্মক, দ্বিতীয় বুনিয়াদী সমাধান অনুকূল কিন্তু অসম্ভাব্য।

[illegible] b_2 ধনাত্মক, দ্বিতীয় সারিকে কী সারি হিসেবে চিহ্নিত করি যা s_2 কে [illegible]ব্য চলক হিসেবে প্রদান করে। কিন্তু যেহেতু s_2 সারি কোন ঋণাত্মক [illegible]দান ধারণ করে না, অন্য কোন চলক ভিত্তিতে প্রবেশ করবে না। ফলে প্রদত্ত যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামিং সমস্যার কোন সম্ভাব্য সমাধান নেই।

উদাহরণ-22: নিচে বর্ণিত লিনিয়ার প্রোগ্রামিং সমস্যাটি দ্বৈত-সিমপ্লেক্স পদ্ধতিতে সমাধান কর। [Use dual Simplex method to solve the L. P. P.]

গরিষ্ঠকরণ কর [Maximize]: $z = -3x_1 - x_2$

শর্তসমূহ [Subject to]: $x_1 + x_2 \geq 1$

$2x_1 + 3x_2 \geq 2$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

2020

সমাধান: প্রদত্ত শর্তসমূহকে $\leq$ আকারে পরিণত করে পাই

গরিষ্ঠকরণ: $z = -3x_1 - x_2$

শর্তসমূহ: $-x_1 - x_2 \leq -1$

$-2x_1 - 3x_2 \leq -2$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

....

CamScanner

যেহেতু সকল $\bar{c}_j \geq 0$, সুতরাং প্রদত্ত সমস্যাটির চূড়ান্ত অনুকূল সমাধান বিদ্যমান।

$\therefore$ নির্ণেয় অনুকূল সমাধান, $x = \frac{100}{3}, y = \frac{200}{3}, z = 0$

এবং G এর গরিষ্ঠমান $= \frac{1000}{3} + \frac{1200}{3} + 0 = \frac{2200}{3}$

সমস্যা-3: নিম্নের সমস্যাটির দ্বৈত আকার লিখ [Write dual of the following problem]:

গরিষ্ঠকরণ [Maximize]: $z = 2x_1 + 3x_2 - 4x_3$

শর্ত হচ্ছে [Subject to]: $3x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$

$$-4x_1 + 3x_3 \geq 4$$

$$x_1 - 5x_2 + x_3 = 5$$

$x_1, x_2 \geq 0, x_3$ এর চিহ্ন উন্মুক্ত। [unrestricted.]

[NUMSc-15]

সমাধান: যেহেতু x_3 হলো বাধাহীন।

ধরি, $x_3 = x_3' - x_3''$ যেখানে $x_3' \geq 0, x_3'' \geq 0$

যেহেতু ৩য় শর্তটি একটি সমীকরণ, সুতরাং এটিকে নিম্নরূপে লেখা যায়,

$$x_1 - 5x_2 + x_3 \leq 5 \text{ এবং } x_1 - 5x_2 + x_3 \geq 5$$

$$\Rightarrow x_1 - 5x_2 + x_3 \leq 5 \text{ এবং } -x_1 + 5x_2 - x_3 \leq -5$$

সমস্যা-2: Simplex পদ্ধতি ব্যবহার করে নিচের L.P. সমস্যার সমাধান কর [Solve the following problem by simplex technique.]:

গরিষ্ঠকরণ কর [Maximize]: $G = 10x + 6y + 4z$

শর্ত হচ্ছে [Subject to]:

$$x + y + z \leq 100$$
$$10x + 4y + 5z \leq 600$$
$$2x + 2y + 5z \leq 300$$
$$x, y, z \geq 0$$

[NUMSc-11]

2019

19

সমাধান: প্রদত্ত সমস্যাটি নিম্নরূপ,

গরিষ্ঠকরণ কর: $G = 10x + 6y + 4z$

শর্তসমূহ:

$$x + y + z \leq 100$$
$$10x + 4y + 5z \leq 600$$
$$2x + 2y + 5z \leq 300$$
$$x, y, z \geq 0$$

প্রদত্ত সমস্যাটির প্রমাণাকার নিম্নরূপ,

CamScanner

যেহেতু শেষ টেবিলের পিভোট কলামে কোনো ধনাত্মক উপাদান নেই। সুতরাং আমরা সর্বনিম্ন অনুপাত নিয়ম ব্যবহার করতে পারি না। অতএব আমরা বলতে পারি যে, সমস্যাটির অসীমায়িত সমাধান বিদ্যমান।

সমস্যা-6: সিমপ্লেক্স পদ্ধতি ব্যবহার করে নিচের লিনিয়ার প্রোগ্রামিং সমস্যার সমাধান কর [Solve the following linear programming problem using simplex method]:

লঘিষ্ঠকরণ [Minimize]: $z = -3x_1 + x_2 + x_3$

শর্তসমূহ [Subject to]: $x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 11$

$$-4x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3$$

$$2x_1 - x_3 = -1$$

2019

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

[NUMSc-12, 17]

সমাধানঃ ৩য় শর্তকে '-1' দ্বারা গুণ করে এবং ১ম ও ২য় শর্তে যথাক্রমে কমতি চলক $s_1 \geq 0$ ও একটি বাড়তি চলক $s_2 \geq 0$ এবং ২য় ও ৩য় শর্তে যথাক্রমে কৃত্রিম চলক $w_1 \geq 0$ ও $w_2 \geq 0$ যুক্ত করি।

....

...বাইরে ক্রস চিহ্ন দিই।

যা... ...র্বাপেক্ষা কম খরচ হলো c_{33}। সুতরাং সর্বশেষ ভিত্তি চলক $x_{33} = \min(3,3) = 3$ যেহেতু তৃতীয় সারির সরবরাহ নিঃশেষিত হয়েছে এবং তৃতীয় কলামের চাহিদা পূর্ণ হয়েছে। সুতরাং ঐ সারি ও কলামের বাইরে ক্রস চিহ্ন দিই।

ভিত্তি চলকের সংখ্যা $= 6 = (3+4-1)$

অর্থাৎ, $m+n-1$, সুতরাং এগুলোই ভিত্তি সম্ভাব্য সমাধান।

সুতরাং প্রাথমিক বুনিয়াদি সম্ভাব্য সমাধানগুলি

$$x_{11} = 6, x_{22} = 1, x_{31} = 1, x_{32} = 4, x_{33} = 3, x_{34} = 2$$

2A.5.5 ভোজেলের আসন্নায়ন পদ্ধতি (Vogel's Approximation Method)

Q. পরিবহন সমস্যার প্রাথমিক সম্ভাব্য সমাধান নির্ণয়ের পদ্ধতিসমূহের মধ্যে তোমার নিকট উত্তম পদ্ধতিটির বর্ণনা দাও। [What are the methods to determine the initial feasible solution of a transportation problems? Describe the best method to you among these methods.] *[NUMSc-09]*

ভোজেলের আসন্নায়ন পদ্ধতির ধাপসমূহ নিম্নরূপঃ

প্রথম ধাপঃ প্রত্যেক সারি ও প্রত্যেক কলামের সর্বাপেক্ষা কম এবং দ্বিতীয় সর্বাপেক্ষা কম খরচের পার্থক্য হতে দন্ড (penalties) নির্বাচন করতে হবে।

দ্বিতীয় ধাপঃ সর্বাপেক্ষা বড় সারি পার্থক্য বা কলাম পার্থক্যকে বন্ধনী বা বৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ করতে হবে। যদি সর্বাপেক্ষা বৃহৎ সারি পার্থক্য ও কলাম পার্থক্যের সমান হয় তবে যেকোনো একটিকে বৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ করতে হবে।

তৃতীয় ধাপঃ বৃত্ত দ্বারা আবৃত্ত পার্থক্য বরাবর সারি (বা কলাম) হতে সর্বনিম্ন খরচ যে সেলে আছে তা সনাক্ত করে উক্ত সেলে ভিত্তি চলকের অবস্থান বিবেচনা করে চাহিদা ও সরবরাহের ছোটটিকে তার মান গণনা করতে হবে।

চতুর্থ ধাপঃ চাহিদা ও সরবরাহের যেটি পরিপূর্ণ হয়েছে ঐ বরাবর সারি বা কলামে (পূর্ণটির বরাবর) কাটা চিহ্ন (×) দিতে হবে এবং পরবর্তী ধাপে উক্ত সারি বা কলামের হিসাব করা যাবে না।

$$\bar{c}_{23} = 691 - (-97 + 570) = 217 > 0$$

$$\bar{c}_{24} = 791 - (-97 + 867) = 21 > 0$$

$$\bar{c}_{31} = 995 - (-182 + 449) = 728 > 0$$

$$\bar{c}_{32} = 682 - (-182 + 513) = 351 > 0$$

যেহেতু সকল অবুনিয়াদি চলকের ক্ষেত্রে সকল $\bar{c}_{ij} > 0$ । সুতরাং উপরোক্ত সম্ভাব্য সমাধানই হলো নির্ণেয় সমাধান

সুতরাং মোট সর্বনিম্ন খরচ- 152535 টাকা।

সমস্যা-2: North-West Corner নিয়মে নিম্নের পরিবহন সমস্যার বেসিক সম্ভাব্য সমাধান বের কর [Find the basic feasible solution of the following transportation problem by using North-West Corner rule]:

	1	2	3	4	5	প্রাপ্য [Available]
A	4	3	1	2	6	80
B	5	2	3	4	5	60
C	3	5	6	3	2	40
D	2	4	4	5	3	20
প্রয়োজন [Required]	60	60	30	40	10	

[NUMSc-11]

সমাধান:

	1	2	3	4	5	সরবরাহ
A	60 [4]	20 [3]	[1]	[2]	[6]	80/20 ×
B	[5]	40 [2]	20 [3]	[4]	[5]	60/20 ×

যেহেতু সকল সেলের মান অ-ধনাত্মক সুতরাং সমাধানটি চূড়ান্ত।

∴ চূড়ান্ত সমাধান: $x_{11}=8, x_{12}=7, x_{24}=4, x_{31}=1, x_{33}=5$ এবং $x_{34}=2$ এবং সকল অবুনিয়াদী চলকের মান শূন্য।

অতএব, সর্বনিম্ন পরিবহন খরচ এর নিমিত্তে চূড়ান্ত সমাধানের পরিকল্পনায়

মূলবিন্দু	O_1	হতে 8	একক	পণ্য	D_1	গন্তব্যে পৌঁছাবে
"	O_1	" 7	"	"	D_2	" "
"	O_2	" 4	"	"	D_4	" "
"	O_3	" 1	"	"	D_1	" "
"	O_3	" 5	"	"	D_3	" "
"	O_3	" 2	"	"	D_4	" "

∴ সর্বনিম্ন পরিবহন খরচ হবে = 159 একক।

সমস্যা-7: পাথর নিক্ষেপ (Stepping stone) পদ্ধতি ব্যবহার করে নিচের পরিবহন সমস্যাটি সমাধান কর [Using stepping stone method solve the following transportation problem]:

6	3	5	4	22
5	9	2	7	15
5	7	8	6	8
7	12	17	9	

[NUMSc-14, 17]

সমাধান: ভোজেলের আসন্নায়ন পদ্ধতি ব্যবহার করে প্রাথমিক বুনিয়াদি সম্ভাব্য সমাধান নির্ণয় করা হলো:

	W_1	W_2	W_3	W_4	সরবরাহ	পেনাল্টি
F_1	6	12 (3)	2 (5)	8 (4)	22/10/8	(1) (1) (1) (2) ×
F_2	5	9	15 (2)	7	15	(3) (3) ×

সমস্যা-3: একটি কোম্পানির ভিন্ন ভিন্ন জায়গায় 4টি মিল আছে। যাহারা A, B, C, D এবং E গুদামঘরে পণ্য সরবরাহ করে। মিলগুলির মাসিক উৎপাদন ক্ষমতা যথাক্রমে 200, 175, 150 এবং 325। প্রতিমাসে গুদামগুলির চাহিদা পর্যায়ক্রমে 110, 90, 120, 230 এবং 160। প্রত্যেক মিল থেকে বিভিন্ন গুদামঘরে প্রতি একক পণ্য সরবরাহ করিবার খরচ নিম্নলিখিত ছক দ্বারা প্রদত্ত। এমন একটি পরিবহন সমস্যার Vogel's Approximation পদ্ধতি ব্যবহার করিয়া বুনিয়াদি সম্ভাব্য সমাধান কর [A company has factories at four different places, which supply warehouses A, B, C, D and E. Monthly factory capacities are 200, 175, 150 and 325 respectively. Monthly warehouse requirements are 110, 90, 120, 230 and 160 respectively. Unit shipping costs are given below. Find the initial basic feasible solution using Vogel's Approximation method]:

গুদামঘর [Warehouse] / কারখানা [Factory]	A	B	C	D	E
1	13	–	31	8	20
2	14	9	17	6	10
3	25	11	12	17	15
4	10	21	13	–	17

1 নম্বর মিল থেকে B নম্বর গুদামে এবং 4 নম্বর মিল থেকে D নম্বর গুদামে পণ্য সরবরাহ করা সম্ভব নয়। [Shipment from 1 to B and from 4 to D is not possible.] *[NUMSc-10]*

সমাধান: Vogel's Approximation পদ্ধতি ব্যবহার করে বুনিয়াদি সম্ভাব্য সমাধান নিম্নে দেওয়া হলো:

প্রদত্ত সমস্যার উৎপাদন ক্ষমতা $= (200 + 175 + 150 + 325)$ একক

$= 850$ একক

এবং চাহিদা $= (110 + 90 + 120 + 230 + 160)$ একক $= 710$ একক

অর্থাৎ অতিরিক্ত উৎপাদন ক্ষমতা পূরণের জন্য শূন্য সহগ বিশিষ্ট একটি ডামি উৎস

-9: নিচের পরিবহন সমস্যার অপটিমাল সমাধান নির্ণয় কর, যেখানে ছকের ঘরে পরিবহন খরচ টাকায় দেওয়া আছে [Find the optimal solution to the following transportation problem which the cells contain the transportation cost in taka]:

	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	প্রাপ্য [due]
F_1	7	6	4	5	9	40
F_2	8	5	6	7	8	30
F_3	6	8	9	6	5	20
F_4	4	7	7	8	6	10
প্রয়োজন [necessity]	30	30	15	20	5	100

2020 *[NUMSc-11, 15, 17]*

াধান:

	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	সরবরাহ	পেনাল্টি
F_1	5 [7]	6	15 [4]	20 [5]	9	40/25/5/0	(1)(1)(1)(1)(2) × ←
F_2	8	30 [5]	6	7	8	30/0	(1)(1)(1)(2) × ←
F_3	15 [6]	8	9	6	5 [5]	20/15/0	(1)(1)(0)(0)(0)×
F_4	10 [4]	7	7	8	6	10/0	(2) × ←
হিদা	30/20/5/0	30/0	15/0	20/0	5/0		
পেনাল্টি	(2) (1) (1) (1) (1) (1)↑ ×	(1) (1) (1) (1) ×	(2) (2) (2)↑ ×	(1) (1) (1) (1) (1) ×	(1) (3)↑ ×		

∴ বুনিয়াদি সমা—

2B.4 কর্মনিয়োগ সমস্যা সমাধানের জন্য হাঙ্গেরীয়ান পদ্ধতি (Hungarian method for solving assignment problem) 2020 *[NUMSc-00]*

Q. Assignment সমস্যা সমাধানে একটি পদ্ধতি আলোচনা কর। [Discuss a method for solving Assignment problems.] *[NUMSc-13, 16]*

অথবা, এ্যাসাইনমেন্ট সমস্যা সমাধানে Hungarian পদ্ধতি আলোচনা কর। [Discuss Hungarian method for solving Assignment problems.] *[NUMSc-11]*

হাঙ্গেরীয় পদ্ধতিতে চূড়ান্ত কর্মনিয়োগ অর্জন করার জন্য গণনার বিভিন্ন ধাপসমূহ নিম্নরূপে সংক্ষেপে উপস্থাপন করা যায়:

ধাপ-1: খরচ ম্যাট্রিক্সের সারি এবং কলামের সংখ্যা সমান কি না তা লক্ষ্য করি। যদি সমান না হয়, তবে বর্গ ম্যাট্রিক্স গঠন করার জন্য কৃত্রিম সারি বা কলাম যোগ করি।

ধাপ-2: বর্গাকার খরচ ম্যাট্রিক্সে:

(i) প্রত্যেক সারির সবচেয়ে ছোট উপাদানটি ঐ সারির সকল উপাদান থেকে বিয়োগ করে সারিটির হ্রাসকৃত আকার নির্ণয় করি।

(ii) প্রত্যেক কলামের ক্ষেত্রেও অনুরূপ প্রক্রিয়া পুনরাবৃত্ত করি।

CamScanner

রয়েছে, সুতরাং একটি চূড়ান্ত সমাধানে পৌঁছানো গেল।

চূড়ান্ত কর্মনিয়োগ হলো: $A \rightarrow III,\ C \rightarrow II$

$$B \rightarrow IV,\ D \rightarrow I$$

$\therefore$ সর্বনিম্ন খরচ $=1+6+4+5=16$ একক।

সমস্যা-6: একটি প্রকল্পে চারটি কাজ আছে যার জন্য চারজন ঠিকাদার টেন্ডার জমা দিয়েছে। নিম্নের ম্যাট্রিক্সে টেন্ডারে উদ্ধৃত্ত অর্থের পরিমাণ (লক্ষ টাকায়) দেওয়া আছে। [A project consists of four major jobs for which four contractors submitted tenders. The tender amounts quoted in lakhs of taka are given in matrix below.]

কাজ [Jobs]

ঠিকাদার [Contractors]	A	B	C	D
1	18	26	17	11
2	13	28	14	26
3	38	19	18	15
4	19	26	24	10

প্রত্যেক ঠিকাদারকে কমপক্ষে একটি কাজ দিতে হবে, কোন ঠিকাদারকে কোন কাজটি দিলে প্রকল্পের সর্বসাকুল্যে খরচ ন্যূনতম হবে, তা নির্ণয় কর। [Find the assignment which minimizes the total cost of the project, each contractor has to be assigned at least one job.] *[NUMSc-14]*

সমাধান: প্রদত্ত ম্যাট্রিক্স, $\begin{bmatrix} 18 & 26 & 17 & 11 \\ 13 & 28 & 14 & 26 \\ 38 & 19 & 18 & 15 \\ 19 & 26 & 24 & 10 \end{bmatrix}$

প্রত্যেক সারির সবচেয়ে ছোট উপাদানটি প্রতিষঙ্গী সারির প্রতিটি উপাদান থেকে বিয়োগ করে উপরোক্ত ম্যাট্রিক্সটির রূপান্তরিত আকার পাই,

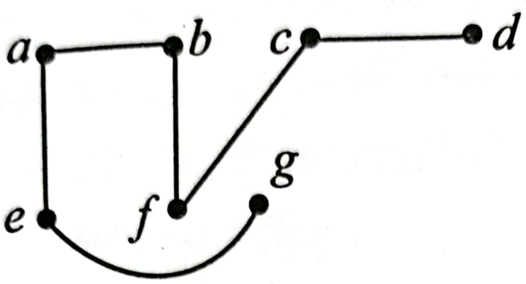
সমস্যা-৪: একজন বিক্রয়কারীকে মোট পাঁচটি শহর A, B, C, D এবং E পরিদর্শন করতে হয়। পাঁচটি শহরের দূরত্ব (শত কিলোমিটার) দেওয়া হলো [A salesman has to visit five cities A, B, C, D and E. The distance (in hundred km) between the five cities are as follows]: 2020

	To				
From	A	B	C	D	E
A	–	2	4	7	1
B	5	–	2	8	2
C	7	6	–	4	6
D	10	3	5	–	4
E	1	2	2	8	–

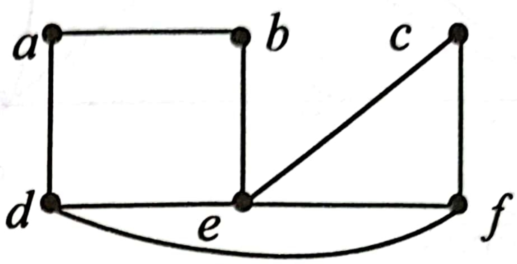
যদি বিক্রয়কারী A শহর হতে যাত্রা আরম্ভ করে এবং পুনরায় A শহরে ফিরে আসে, তবে কোন পথ বাছাই করলে ভ্রমণে কম দূরত্ব অতিক্রম করতে হবে? [If the

CamScanner

G



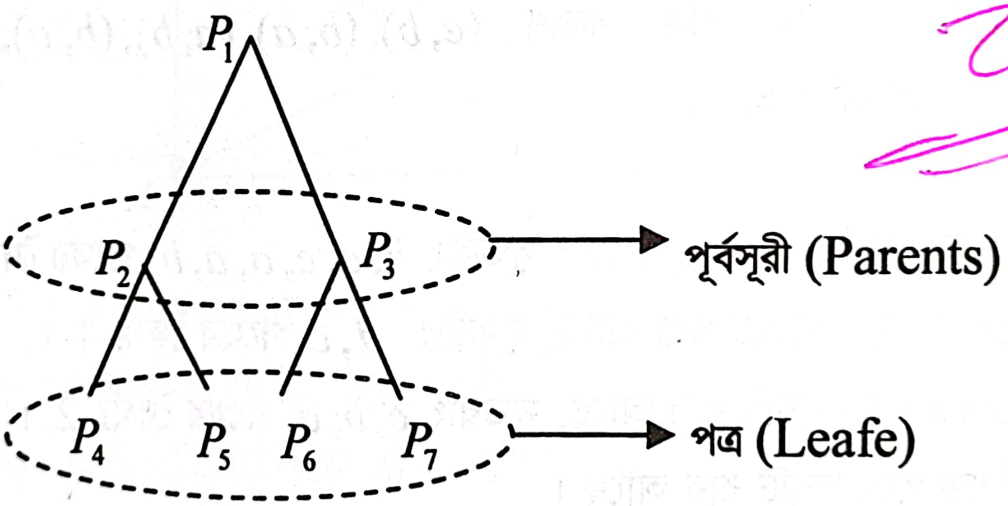
T_2



T_3

এখানে G একটি সরল লেখ। T_1 ও T_2 $G-$এর দুইটি স্প্যানিং ট্রি। কিন্তু T_3, G -এর স্প্যানিং ট্রি নয়।

উপপাদ্য-1: n সংখ্যক শীর্ষবিন্দুবিশিষ্ট যেকোনো ট্রি তে $n-1$ সংখ্যক ধার বিদ্যমান। **[A tree with n vertices has $n-1$ edges.]**



প্রমাণঃ প্রারম্ভিক ধাপঃ (যখন $n=1$)

যেহেতু একটি শীর্ষবিন্দুযুক্ত ট্রি এর কোনো ধার থাকেনা। আমরা পাই $n=1$ এর জন্য উপপাদ্যটি সত্য।

আরোহী ধাপঃ মনে করি, $n=k$ এর জন্য উপপাদ্যটি সত্য। অর্থাৎ, k সংখ্যক শীর্ষবিন্দুযুক্ত ট্রিতে $k-1$ সংখ্যক ধার বিদ্যমান।

মনে করি, $k+1$ সংখ্যক শীর্ষবিন্দযুক্ত একটি ট্রি T । ধরি T এর একটি পত্র

অন্যান্য প্রবাহের প্রবাহ হার জানা অত্যন্ত জরুরী।

এই ধরনের নেটওয়ার্কে ভারযুক্ত সংযুক্ত লেখ দ্বারা উপস্থাপন করা হয়, যেখানে শীর্ষবিন্দু গুলি এক একটি ষ্টেশন এবং ধার বা বাহুগুলি এক একটি সড়ক বা রেখা বিবেচনা করা হয় যে পথে পণ্য (তেল,গ্যাস, পানি, বার্তা (message) এর সংখ্যা, গাড়ীর সংখ্যা ইত্যাদি) প্রবাহ ঘটে। এখানে ভার একটি বাস্তব সংখ্যা যা প্রত্যেক ধারের সাথে সংযুক্ত এবং এটি রেখার ধারণ ক্ষমতা প্রকাশ করে অর্থাৎ একক সময়ে প্রবাহের সম্ভাব্য সর্বোচ্চ প্রবাহ হার নিরূপন করে।

3.9.1 গরিষ্ঠ প্রবাহ সমস্যা সমাধানের অ্যালগরিদম (Algorithm for solving maximal flow problems)

Q. সর্বোচ্চ প্রবাহ সমস্যা সমাধানের জন্য এলগরিদম লিখ। [Write down the algorithm for solving maximal flow problem.] *[NUMSc-10, 14, 17]*

ধাপ-1: নেটওয়ার্কের সকল শীর্ষের প্রাথমিক সম্ভাব্য প্রবাহ শূন্য অর্থাৎ সকল i এর জন্য $x_i = 0$ বিবেচনা করা হয়।

ধাপ-2: সকল শীর্ষবিন্দুর সেট V কে V_1 ও V_2 দুইটি উপসেটে এমনভাবে বিভক্ত করা হয় যেন শীর্ষবিন্দুগুলোর প্রত্যেকটি হয় V_1 না হয় V_2 এর অন্তর্গত হয় কিন্তু উভয়টির অন্তর্গত না হয়। প্রাথমিকভাবে উৎস $v_a \in V_1$ এবং অপর শীর্ষবিন্দুগুলো V_2 এর অন্তর্গত বিবেচনা করা হয়।

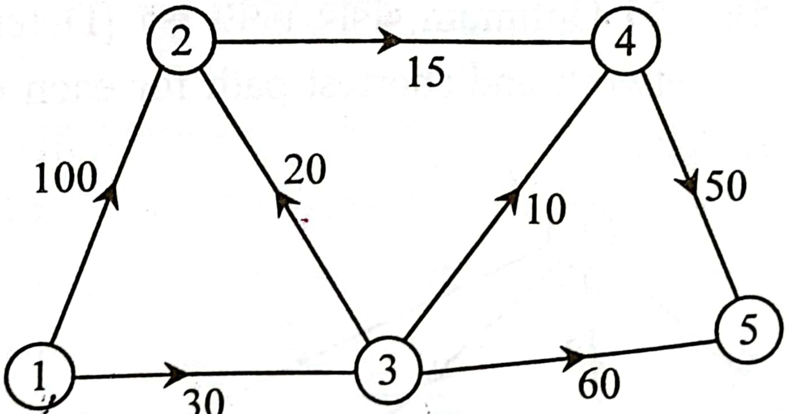
ধাপ-3: V_2 এর উপাদানসমূহকে নিম্নের উপায়ে V_1 এর উপাদানে রূপান্তর করা হয়।

$v_j \in V_1, v_k \in V_2$ হলে

(a) যদি v_j থেকে v_k তে প্রবাহ $x < c$ হয় তবে ... কে V_1 এ অন্তর্ভুক্ত করা

সমাধানকৃত সমস্যাবলী (Solved Problems)

সমস্যা-1: Dijkstra এর এলগরিদম ব্যবহার করে নিম্নে প্রদত্ত দূরত্ব চিহ্নিত নেটওয়ার্কের ন্যূনতম পথ নির্ণয় কর [Find the shortest route using Dijkstra's algorithm of the given network with distances marked]:



[NUMSc-14, 16]

সমাধান:

ধাপ-1: শীর্ষবিন্দু 1 কে [0, –1] দ্বারা চিহ্নিত করি।

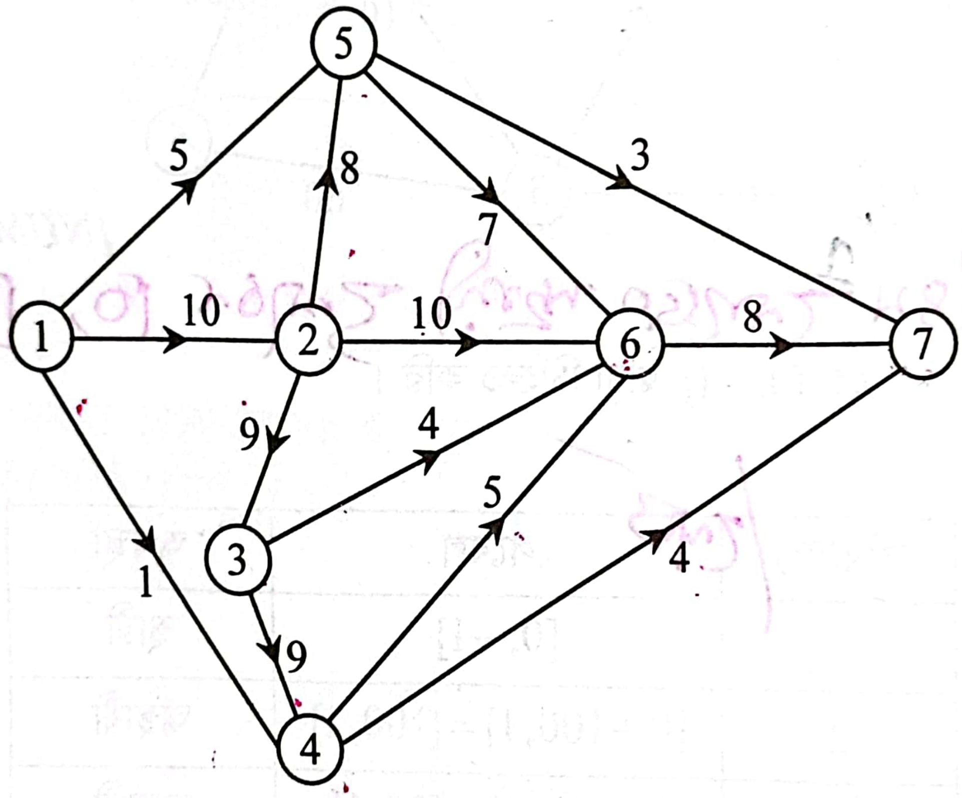
ধাপ-2:

শীর্ষবিন্দু	লেবেল	অবস্থা
1	[0, –1]	স্থায়ী
[illegible]	[0 + 100, 1] = [100, 1]	অস্থায়ী
[illegible]	[0 + 30, 1] = [30, 1]	অস্থায়ী

মন্তব্য-1: নোড-2 এর ক্ষুদ্রতম পথ $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2$ এবং ক্ষুদ্রতম দূরত্ব 55।

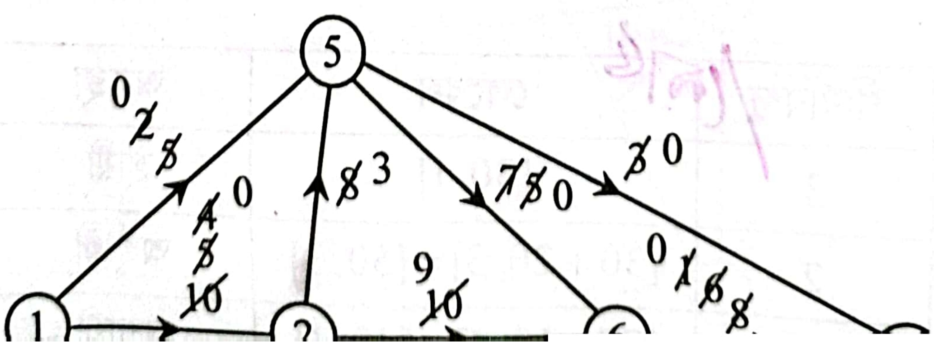
মন্তব্য-2: নোড-5 এর ক্ষুদ্রতম পথ $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ এবং ক্ষুদ্রতম দূরত্ব $= 90$।

সমস্যা-2: নিচের নেটওয়ার্কের জন্য পথসমূহ নির্ণয় কর এবং উহার প্রত্যেক ক্ষেত্রে স্বল্পতম পথ বের কর। ইহা হতে Optimum প্রবাহ নির্ণয় কর [Determine the path from the below network and shortest path for each case. Also find the optimum flow]:



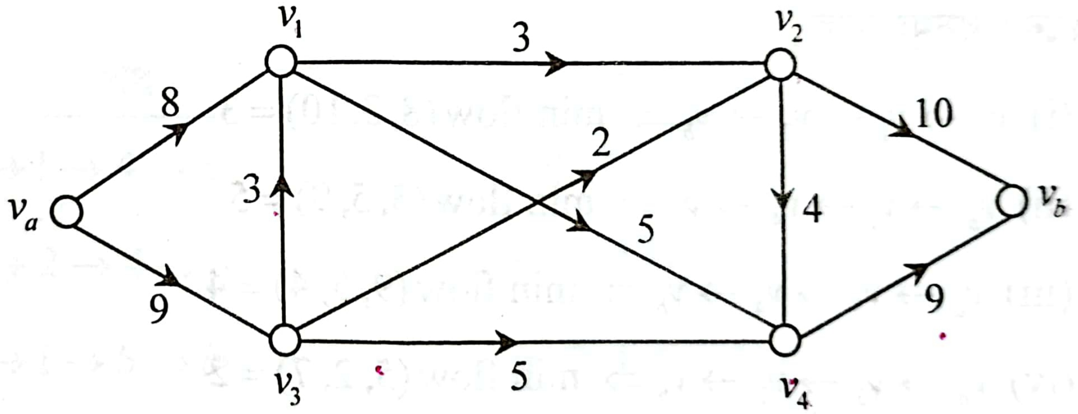
[NUMSc-11, 13, 16]

সমাধান:



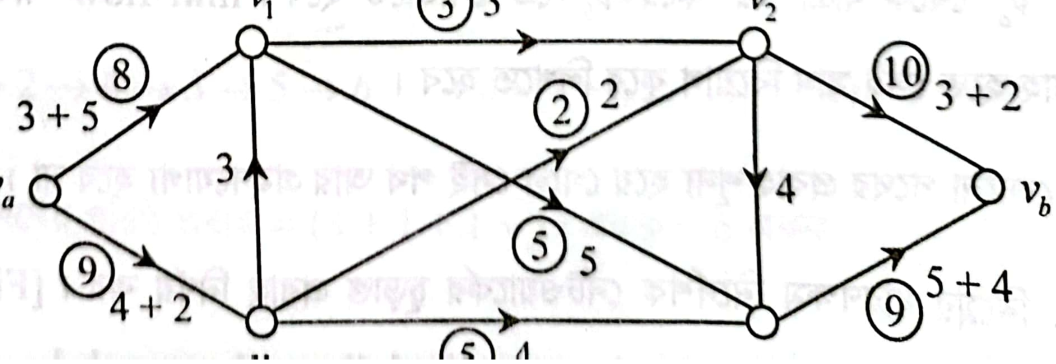
ধার	$(\bar{c}_{ij}, \bar{c}_{ji}) - (c_{ij}, c_{ji})$	প্রবাহ
(4, 5)	(20, 0) – (0, 20) = (20, – 20)	20
(2, 5)	(30, 0) – (10, 20) = (20, – 20)	20
(3, 5)	(20, 0) – (0, 20) = (20, – 20)	20
	নেটওয়ার্কটির গরিষ্ঠ প্রবাহ =	60 একক

সমস্যা-7: ধারগুলোতে চিহ্নিত সংখ্যাগুলোকে প্রবাহ ক্ষমতা বিবেচনা করে নিম্নবর্ণিত নেটওয়ার্কের চূড়ান্ত প্রবাহ নির্ণয় কর। [Find the optimum flow for the network given below considering the capacity marked on the arcs.]



[NUMSc-10, 14, 17]

সমাধান:



4.4 ব্রাঞ্চ ও বাউন্ড অ্যালগরিদম (Branch and bound algorithm)

Q. ব্রাঞ্চ এবং বাউন্ড প্রণালীটি বর্ণনা কর। [Describe Branch and Bound method.] 2020 ***[NUMSc-09, 14, 16]***

ধাপ-1: সমস্যাটিকে সিমপ্লেক্স পদ্ধতিতে সমাধান এবং পূর্ণসংখ্যার সীমাবদ্ধতাসমূহ বর্জন করতে হবে।

ধাপ-2: ধাপ-1 হতে প্রাপ্ত সমাধানের পূর্ণ-সাংখ্যিকতা পরীক্ষার জন্য নিম্নের দুটি সম্ভাবনা হতে পারে:

(i) যদি সমাধান পূর্ণসংখ্যার হয় তবে চলমান সমাধানই চূড়ান্ত সমাধান হবে।

(ii) যদি সমাধান পূর্ণসংখ্যার না হয় তাহলে পরবর্তী ধাপে যেতে হবে।

ধাপ-3: উদ্দেশ্য ফাংশনের মানকে উর্ধ্বসীমা বিবেচনা করি এবং সিদ্ধান্ত চলকসমূহের বিভিন্ন মান হতে ভগ্নাংশকে রাউন্ডিং অফ নিয়মে পূর্ণসংখ্যায় রূপান্তর করে নিম্নসীমা নির্ণয় করি।

ধাপ-4: যদি x_j এর চূড়ান্ত মান x_j^* ভগ্নাংশিক হয় তবে সমস্যাটিকে নিম্নরূপে দুটি উপসমস্যায় বিভক্ত করতে হবে:

(i) একটি অতিরিক্ত শর্ত $x_i \le [x_j^*]$ সহযোগে প্রদত্ত সমস্যা।

(ii) একটি অতিরিক্ত শর্ত $x_j \ge [x_j^*]+1$ সহ প্রদত্ত সমস্যা,

যেখানে $[x_j^*]$ হলো x_j^* ধারণকারী বৃহত্তম পূর্ণসংখ্যা।

ধাপ-5: ধাপ-4 এর দুটি উপসমস্যাকে সমাধান করলে তিনটি সম্ভাবনা পাওয়া যায়:

(i) যদি উপসমস্যাটির চূড়ান্ত সমাধান পূর্ণসাংখ্যিক হয় তবে নির্ণেয় সমাধান হবে প্রদত্ত z এর বৃহত্তম মানটি।

(ii) যদি একটি উপসমস্যার চূড়ান্ত সমাধান পূর্ণসংখ্যা হয় এবং অন্য উপসমস্যার কোনো সম্ভাব্য চূড়ান্ত সমাধান না থাকে তাহলে যে উপসমস্যার পূর্ণসংখ্যা সমাধান বিদ্যমান তাই নির্ণেয় সমাধান বলে বিবেচিত হবে।

CS CamScanner

$E_j - c_j$	0	0	0	0	1	$z = 2$

যেহেতু সকল $\underline{x}_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ এর মান পূর্ণসংখ্যা, সুতরাং চূড়ান্ত পূর্ণসংখ্যার সমাধান, $x_1 = 0, x_2 = 2$ এবং Max. $z = 2$ ।

সমস্যা-2: নিচের পূর্ণসংখ্যা প্রোগ্রামিং সমস্যার সমাধান নির্ণয় কর [Solve the following integer programming problem]:

গরিষ্ঠকরণ কর [Maximize]: $z = x_1 + 4x_2$

শর্তসমূহ [Subject to]: $2x_1 + 4x_2 \le 7$

$5x_1 + 3x_2 \le 15$

$x_1, x_2 \ge 0$ এবং পূর্ণসংখ্যা। [and integers.]

[NUMSc-17]

সমাধান: প্রথম এবং দ্বিতীয় শর্তে কমতি চলক যথাক্রমে $x_3 \ge 0$ এবং $x_4 \ge 0$ যোগ করে অসমতাগুলিকে সমতায় রূপান্তর করি। এক্ষেত্রে সমস্যাটির পরিবর্তিত আকার হয় নিম্নরূপ:

গরিষ্ঠকরণ: $z = x_1 + 4x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4$

শর্তসমূহ: $2x_1 + 4x_2 + x_3 + 0 \cdot x_4 = 7$

$5x_1 + 3x_2 + 0 \cdot x_3 + x_4 = 15$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$

CamScanner

0	s_2	0	0	0	1	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1	x_1	1	0	0	0	-2	1	1
0	s_1	0	0	1	0	0	-2	1
$c_j - E_j$		0	0	0	0	-2	-1	$z=5$

এখানে সমাধানঃ $x_1 = 1, x_2 = 1, s_1 = 1, s_2 = 9$, যা পূর্ণসংখ্যা।

$\therefore$ চূড়ান্ত সমাধানঃ $x_1 = 1, x_2 = 1$ এবং z এর গরিষ্ঠমান $= 5$ ।

সমস্যা-4: Gomory fractional cut পদ্ধতি ব্যবহার করে নিচের ইন্টিজার লিনিয়ার প্রোগ্রামিং সমস্যাটি সমাধান কর [Solve the following integer linear programming problem by using Gomory fractional cut]:

গরিষ্ঠকরণ কর [Maximize]: $z = -4x_1 + 5x_2$

শর্তসমূহ [Subject to]: $-3x_1 + x_2 \le 6$

$$2x_1 + 4x_2 \le 12$$

x_1, x_2 অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা। [are non-negative integers]

[NUMSc-11, 13, 16]

সমাধানঃ প্রথম ও দ্বিতীয় শর্তে কমতি চলক যথাক্রমে $x_3 \ge 0$ এবং $x_4 \ge 0$ যোগ করে প্রদত্ত অসমতাগুলিকে সমতায় রূপান্তর করি।

....

(i) একটি নির্দিষ্ট সময়ে একটি মেশিনে একটি মাত্র কাজ সম্পাদিত হবে।
(ii) প্রত্যেকটি কাজ শুরু হওয়ার পর তা সমাপ্তির পূর্ব পর্যন্ত চলমান থাকবে।
(iii) পরবর্তী কাজ শুরু হওয়ার পূর্বে অবশ্যই পূর্ববর্তী কাজ সমাপ্ত হতে হবে।
(iv) প্রত্যেক ধরণের কাজের জন্য একটি মাত্র মেশিন থাকবে।
(v) চাহিত ক্রমানুসারে প্রত্যেক কাজ যত দ্রুত সম্ভব সম্পাদন করতে হবে।
(vi) প্রক্রিয়াকরণের সময় কার্য সম্পাদনের ক্রমের উপর অনির্ভরশীল।
(vii) কাজ এক মেশিন হতে অন্য মেশিনে স্থানান্তরের মধ্যবর্তী সময় গণনযো হবে না।
(viii) বিবেচনাধীন সময়ের পূর্বেই সকল কাজ জ্ঞাত ও প্রক্রিয়াকরণের জন্য প্রস্তুত
(ix) প্রক্রিয়াকরণ সময় পূর্বনির্ধারিত এবং অপরিবর্তনীয়।
(x) কাজগুলো সম্পাদনের ক্রম গুরুত্বহীন।

5.4 2 টি মেশিনে n সংখ্যক কাজ প্রক্রিয়াকরণ (Processing n jobs throug two machines)

2020

Q. দুইটি মেশিনের মধ্য দিয়ে n-সংখ্যক কাজ প্রক্রিয়াকরণ প্রণালী বর্ণনা কর [Describe the method of processing n jobs through two machines.]

[NUMSc-15, 1

সমাধান: এই ক্ষেত্রে ক্রমনির্ধারণ সমস্যাটিকে নিম্নোক্তভাবে বর্ণনা করা যায়:

(i) শুধুমাত্র দুইটি A ও B মেশিন থাকবে।
(ii) প্রত্যেকটি কাজ AB ক্রমে সংগঠিত হবে।
(iii) প্রতিটি কাজের A ও B মেশিনে প্রত্যাশিত প্রক্রিয়াকরণ সম (Processing times) $A_1, A_2, \ldots, A_n$; $B_1, B_2, \ldots, B_n$ জানা থাক হবে এবং নিম্নোক্ত ছক অনুযায়ী তা প্রদর্শিত হবে।

কাজ \ মেশিন	A	B
1	A_1	B_1
2	A_2	B_2

5.5 3 মেশিনে n সংখ্যক কাজ সম্পাদন (Processing n jobs through three machines)

Q. তিনটি মেশিনের মধ্য দিয়ে n-সংখ্যক কাজ প্রক্রিয়াকরণ প্রণালী বর্ণনা কর। [Describe the method of processing n jobs through 3 machines.]

[NUMSc-09, 11, 14, 16]

মনে করি, তিনটি মেশিন A, B, C এর মাধ্যমে n-সংখ্যক কাজ $1, 2, 3, \ldots, n$ সম্পাদন করতে হবে এবং এক্ষেত্রে কাজগুলো ABC ক্রমে করতে হবে।

আরও মনে করি যে, প্রত্যেক মেশিনে কাজগুলো করার জন্য প্রত্যাশিত প্রক্রিয়াকরণ সময় $A_1, A_2, \ldots, A_n$; $B_1, B_2, \ldots, B_n$ এবং $C_1, C_2, \ldots, C_n$, যা নিম্নের ছকে দেখানো হলো:

মেশিন / কাজ	A	B	C
1	A_1	B_1	C_1
2	A_2	B_2	C_2
3	A_3	B_3	

সমস্যা-3: A ও B মেশিনে 5 টি কাজ AB ক্রমে সংঘটিত হয়। প্রক্রিয়াকরণ সময় (ঘন্টায়) নিম্নে দেওয়া হলো [There are five jobs each of which must go through the two machines A and B in the order AB. Processing times (in hours) are given below]:

কাজ [Job] / মেশিন [Machine]	1	2	3	4	5
মেশিন [Machine] A	5	1	9	3	10
মেশিন [Machine] B	2	6	7	8	4

কাজ পাঁচটি সংঘটিত করার জন্য কর্ম-অনুক্রম তৈরী কর যাতে ব্যয়িত সময় সর্বনিম্ন হয়। [Determine a sequence for five jobs that will minimize the total elapsed time.]

সমাধান:

কাজ			

6	২য়	48	54	88	102	
	৩য়	54	60	102	116	–
5	১ম	60	69	116	123.5	–
	২য়	69	78	123.5	131	–
2	১ম	78	94	131	138	–
	২য়	94	110	138	145	–
	৩য়	110	126	145	152	–
	৪র্থ	126	142	152	159	–

উপর্যুক্ত তালিকা হতে দেখা যায় মোট ব্যয়িত সময় 159 মি.। A মেশিনের কর্মহীন সময় $(159-142)=17$ মিনিট এবং B মেশিনের কর্মহীন সময় 3 মিনিট।

সমস্যা-6: পাঁচটি কাজ অবশ্যই দুইটি মেশিন A এবং B তে AB ক্রমে সম্পন্ন হবে। প্রক্রিয়াকরণের সময় নিম্নে দেওয়া হলো [There are five jobs each of which must go through the two machines A and B in the order AB. Processing times are given below]:

কাজ [Jobs]	1	2	3	4	5
মেশিন A [Machine A]	5	1	9	3	10
মেশিন B [Machine B]	2	6	7	8	4

সমাধানকৃত সমস্যাবলী (Solved Problems)

সমস্যা-1: নিম্নের লেনদেন ম্যাট্রিক্স এর জন্য লঘিষ্ঠ গরিষ্ঠ এবং গরিষ্ঠ লঘিষ্ঠ মান নির্ণয় কর। [Find the minimax value and maximin value for the following pay off matrix]

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

[NUMSc-14]

সমাধানঃ প্রদত্ত লেনদেন ম্যাট্রিক্স $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

এখানে, ১ম সারির লঘিষ্ঠ উপাদান, $\min(1, 3, 6) = 1$

২য় সারির লঘিষ্ঠ উপাদান, $\min(2, 1, 3) = 1$

৩য় সারির লঘিষ্ঠ উপাদান, $\min(6, 2, 1) = 1$

∴ গরিষ্ঠলঘিষ্ঠ মান $(\underline{v}) = 1$

আবার, ১ম কলামের গরিষ্ঠ উপাদান, $\max(1, 2, 6) = 6$

সমস্যা-35: আধিপত্যতা নীতি দ্বারা নিচের খেলাটি সমাধান কর [Solve the following game by dominance method]:

খেলোয়াড় B [Player B]

খেলোয়াড় A [Player A]

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	8	10	9	14
A_2	10	11	8	12
A_3	13	12	14	13

[NUMSc-14, 17]

সমাধান:

ধাপ-1: দ্বিতীয় সারির সকল উপাদান তৃতীয় সারির সকল উপাদান অপেক্ষা ছোট। সুতরাং দ্বিতীয় সারির উপর তৃতীয় সারির কর্তৃত্ব প্রতিষ্ঠিত হবে। অর্থাৎ দ্বিতীয় সারি বাদ যাবে।

খেলোয়াড় B

খেলোয়াড় A

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	8	10	9	14

CamScanner

খেলোয়াড় A

	B_2
A_3	12

$\therefore$ খেলার মান, $v = 12$

A এর চূড়ান্ত কৌশল $= (0, 0, 1)$

B এর চূড়ান্ত কৌশল $= (0, 1, 0, 0)$

সমস্যা-36: কর্তৃত্ব নীতি ব্যবহার করে X ও Y এর চূড়ান্ত কৌশল এবং লেনদেন ম্যাট্রিক্সটির খেলার মান নির্ণয় কর। [Use dominance principle, find the optimal strategies for X and Y and find the value of the game of the pay off matrix.]

$$
\begin{array}{c} \\ Y \end{array}
\overset{X}{\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 7 & -5 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}}
$$

[NUMSc-10]

সমাধান: প্রদত্ত লেনদেন ম্যাট্রিক্স

$$
Y \overset{X}{\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 7 & -5 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}}
\begin{matrix} 0 \\ (1) \\ -5 \\ -1 \end{matrix}
$$

…টির সমাধান পাওয়া। x_j ও y_i এর মান পাওয়ার পর $\frac{x_i}{V} = X_i$ এবং

$\frac{\ldots}{V}$ … পর্ক ব্যবহার করে A ও B এর প্রকৃত কৌশল যথাক্রমে $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ ও $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ এবং $v = V - k$ ব্যবহার করে খেলার প্রকৃত মান নির্ণয় করা যাবে।

নোটঃ যদি পরীক্ষা করে দেখা যায় যে খেলা মান ধনাত্মক সেক্ষেত্রে k যোগ করার প্রয়োজন নেই।

সমস্যা-44: নিচের খেলা সমস্যাটির একটি যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের সাথে সম্পর্ক বর্ণনা কর। এই সম্পর্ক প্রয়োগ করে খেলাটির সমাধান কর। [Describe the relationship of the following game problem to a linear programming problem. Apply this relationship to solve the game.]

খেলোয়াড় [Player] B

$$\text{খেলোয়াড় [Player] } A \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -3 & -7 \\ -2 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

[NUMSc-98, 99, 03, 10, 12, 14, 16]

A এর চূড়ান্ত কৌশল $\left(\frac{12}{36}, \frac{6}{36}, \frac{18}{36}, 0\right)$

B এর চূড়ান্ত কৌশল $\left(0, \frac{12}{36}, \frac{6}{36}, 0, \frac{18}{36}\right)$

এবং খেলার মান $v = \dfrac{(0\times12)+(-3\times6)+(1\times18)}{18+0+12} = 0$

যেহেতু খেলার মান শূন্য, সুতরাং এটি একটি পরিচ্ছন্ন খেলা।

6.10 $m\times n$ খেলার আসন্ন সমাধান নির্ণয়ের জন্য ব্রাউনের পুনরাবৃত্তি বা আবৃত্ত পদ্ধতি/ব্রাউনের এলগরিদম (Brown's iterative method for approximate solution of $m\times n$ game/Brown's algorithm)

Q. $m\times n$ ম্যাট্রিক্স গেইম সমাধানের জন্য Brown's এলগরিদম ব্যাখ্যা কর। [Explain Brown's algorithm for solving $m\times n$ matrix game.]

[NUMSc-11, 16]

অথবা, সাধারণ ম্যাট্রিক্স গেইম সমাধানের জন্য ব্রাউন অ্যালগরিদম বর্ণনা কর। [Describe Brown's algorithm for solving general matrix game.]

[NUMSc-13]

বাস্তব জীবনে এমন অনেক সমস্যা রয়েছে যাদের প্রকৃত চূড়ান্ত সমাধান (exact optimal solution) করার প্রয়োজন পড়েনা, কেবল মুটামুটিভাবে খেলার মানের কাছাকাছি একটি আসন্ন সমাধান (approximate solution) পাওয়া গেলেই চলে যেখান হতে একটি গড় লাভ নির্ণয় করা যায়। এইরূপ সমস্যার আসন্ন সমাধান নির্ণয়ের জন্য ব্রাউনের পুনরাবৃত্তি পদ্ধতি একটি সুপ্রতিষ্ঠিত পদ্ধতি।

পদ্ধতিটি যে মূল নীতির উপর ভিত্তি করে প্রতিষ্ঠিত তা নিম্নরূপ:

"ধরে নেওয়া হয় যে, দুইজন খেলোয়াড় আবৃত্ত পদ্ধতিতে একটি মূলখেলার বিভিন্ন (অংশ) খেলা খেলে এর প্রত্যেকটিতে একজন তার জন্য সর্ব উত্তম এমন একটি কৌশল বেছে নেবে যেটি অপর খেলোয়াড়ের জন্য হবে সবচেয়ে নিকৃষ্ট। এবার এই

CamScanner

সমস্যা-41: নিম্নের ম্যাট্রিক্স খেলার উপর ব্রাউন এলগরিদমের আট বার পুনরাবৃত্ত প্রয়োগে, খেলোয়াড়দ্বয়ের চূড়ান্ত কৌশল এবং একই সাথে খেলার মানের উর্ধ্বসীমা ও নিম্নসীমা নির্ণয় কর। [Carry out eight iteration of Brown's algorithm on the following matrix game. Find the approximate optimal strategies for players as well as the best available upper and lower bound on the value of the game.]

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

[NUMSc-93, 94, 01, 03, 08, 11, 13, 15]

সমাধান: ১ম ধাপ: ৩য় সারিকে A এর শ্রেয় কৌশল হিসাবে নির্বাচন করি এবং এটিকে ম্যাট্রিক্সটির নিচে লিখি।

২য় ধাপ: এই সারির সর্বাপেক্ষা ছোট উপাদান '1'; এটিকে O এর মধ্যে আবদ্ধ করি এবং 1 বরাবর ম্যাট্রিক্স এর ১ম কলাম অবস্থিত বিধায় এই কলামকে ম্যাট্রিক্স এর ডানে

নির্দিষ্ট সীমা বা ব্যাপ্তির মধ্যে হিসাব করা যাবে এটি প্রত্যাশা করা যায়।

ডাইনামিক প্রোগ্রামিং প্রক্রিয়া সর্বপ্রথম সমস্যাটিকে ছোট-ছোট উপ সমস্যায় বিভাজনের দ্বারা এই ধরনের সমস্যার প্রতিকার ঘটায়।

7.5 $y_1 + y_2 + \cdots + y_n = Q$ শর্ত সাপেক্ষে $y_1 y_2 \cdots y_n$ এর বৃহত্তম মান নির্ণয়ে ডাইনামিক প্রোগ্রামিং এর ব্যবহার (Use of dynamic programming problem to find maximum value of $y_1 y_2 \cdots y_n$ under $y_1 + y_2 + \cdots + y_n = Q$)

Q. $y_1 y_2 y_3 \cdots y_n$ গুণফলটির বৃহত্তম মান নির্ণয়ের জন্য ডাইনামিক প্রোগ্রামিং ব্যবহার কর, যখন $y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_n = Q$। [Use dynamic programming to find the maximum value of the product $y_1 y_2 y_3 \cdots y_n$ when $y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_n = Q$.] *[NUMSc-14]*

NU-2020

সমস্যাটিকে নিম্নোক্তভাবে লেখা যায়,

$$\text{সর্বোচ্চকরণ } \prod_{i=1}^{n} y_i$$

$$\text{শর্ত, } \sum_{i=1}^{n} y_i = Q, y_i \geq 0, \forall_i$$

ডাইনামিক প্রোগ্রামিং সমস্যাটিকে x_i অবস্থা চলক এবং $f_i(x)$ রিটার্ন ফাংশনের n-ধাপ সমস্যা বিবেচনা করতে পারি।

যেন, $x_i = y_1 + y_2 + \cdots\cdots + y_i$ হয়

CamScanner

$$= 3\left(\frac{1}{3}\log\frac{1}{3}\right)$$

সুতরাং n ধাপ সমস্যার জন্য সাধারণীকৃত ফলাফল হবে,

$$p_1 = p_2 = \ldots\ldots = p_n = \frac{1}{n}$$

এবং $f_n^*(1) = n\left(\frac{1}{n}\log\frac{1}{n}\right)$

সমস্যা-2: ডাইনামিক প্রোগ্রামিং কৌশল ব্যবহার করে নিচের সমস্যাটি সমাধান কর [Using dynamic programming techniques solve the following problem]:

লঘিষ্ঠকরণ কর [Minimize]: $Z = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

শর্তসমূহ [Subject to]: $x_1 + x_2 + x_3 \geq 15$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$ ***[NUMSc-09, 14, 16]***

সমাধান: ধরি, মুখ্য চলক y_1, y_2 এবং y_3 যেখানে

$$y_3 = x_1 + x_2 + x_3$$

$$y_2 = x_1 + x_2 = y_3 - x_3$$

$$y_1 = x_1 = y_2 - x_2$$

....

সমস্যা-4: ডাইনামিক প্রোগ্রামিং কৌশল ব্যবহার করে নিচের সমস্যাটি সমাধান কর [Using dynamic programming techniques solve the following problem]:

গরিষ্ঠকরণ কর [Maximize]: $Z = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

শর্তসমূহ [Subject to]: $x_1 + x_2 + x_3 \le 9$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$ *[NUMSc-17]*

সমাধান: প্রদত্ত ডাইনামিক প্রোগ্রামিং সমস্যাটিকে একটি তিন ধাপের সমস্যা বিবেচনা করি, যেখানে অবস্থা চলক y_i এবং রিটার্ন ফাংশন $f_i(y_i)$ যেন

ধাপ-3 তে $y_3 = x_1 + x_2 + x_3$

ধাপ-2 তে $y_2 = x_1 + x_2 = y_3 - x_3$

ধাপ-1 তে $y_1 = x_1 = y_2 - x_2$

এখানে আবর্তক সমীকরণ, $f_3(y_3) = \max\limits_{x_3} \{x_3^2 + f_2(y_2)\}$

$$f_2(y_2) = \max_{x_2} \{x_2^2 + f_1(y_1)\}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -6 < 0 \text{ এবং } \Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -44 < 0$$

যেহেতু মুখ্য অনুরাশি নির্ণায়ক $\Delta_3 < 0$ এবং $\Delta_4 < 0$ অর্থাৎ শেষ দুইটি মুখ্য অনুরাশির চিহ্ন $(-1)^m$ আকার সমর্থন করেছে, সুতরাং $\mathbf{x}_0 = (5, 11, 4)$ বিন্দুতে z এর লঘিষ্ঠমান বিদ্যমান এবং মানটি $z = 381$ ।

সমস্যা-11: ল্যাগ্রাঞ্জের গুণিতক ব্যবহার করে নিম্নের অ-রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যার সমাধান কর। [Solve the following non-linear programming problem using Lagrangian multipliers.]

চূড়ান্তকরণ কর [Optimize]: $z = x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 - 6x_2 + x_3^2 - 4x_3$

শর্তসমূহ [Subject to]: $x_1 + x_2 + x_3 = 7$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$ *[NUMSc-11]*

সমাধানঃ ধরি, $z = f(\mathbf{x}) = x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 - 6x_2 + x_3^2 - 4x_3$

এবং $h(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + x_3 - 7 = 0$

$\therefore$ ল্যাগ্রাঞ্জের ফাংশন হবে

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = f(x_1, x_2, x_3) - \lambda h(x_1, x_2, x_3)$$

$$\Rightarrow L(\mathbf{x}, \lambda) = x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 - 6x_2 + x_3^2 - 4x_3 - \lambda(x_1 + x_2 + x_3 - 7)$$

নিশ্চল বিন্দুর জন্য প্রয়োজনীয় শর্তঃ

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0, \frac{\partial L}{\partial x_3} = 0 \text{ এবং } \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$$

অবতল।

আবার সকল সীমাবদ্ধতার শর্ত ফাংশন রৈখিক, সুতরাং তারা উত্তল।

এটি নির্দেশ করে যে, সমাধানটি সার্বজনীন।

অতএব নির্ণেয় সার্বজনীন সমাধান: $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{3}{2}, x_3 = 0, \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 0$

এবং $f(x)$ এর গরিষ্ঠমান $= \frac{17}{2}$।

সমস্যা 22: কুন-টুকার শর্ত ব্যবহার করে নিম্নের অ-রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যাটির সমাধান কর। [Solve the following non-linear programming problem using Kuhn-Tucker conditions.]

গরিষ্ঠকরণ কর [Maximize]: $z = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 4x_1 + 6x_2$

শর্তসমূহ [Subject to]:

$$x_1^2 + x_2^2 \le 16$$

$$2x_1 + 3x_2 \le 12$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

এবং এটি হতে সার্বজনীন চূড়ান্ত সমাধান বের কর। [and hence find the global optimum solution.] *[NUMSc-02, 03, 10, 13]*

19

সমাধান: মনে করি, $z = f(x) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 4x_1 + 6x_2$

এবং $h_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 16 \le 0$

$h_2(x) = 2x_1 + 3x_2 - 12 \le 0$

CamScanner

সমাধানকৃত সমস্যাবলী (Solved Problems)

উলফের পদ্ধতি (Wolfe's method)

সমস্যা-1: উলফের পদ্ধতি ব্যবহার করে দ্বিঘাত প্রোগ্রামিং সমস্যাটি সমাধান কর। [Solve the quadratic programming problem using Wolfe's method.]

গরিষ্ঠকরণ কর [Maximize]: $z = 2x_1 + 3x_2 - 2x_1^2$

শর্তসমূহ [Subject to]: $x_1 + 4x_2 \leq 4$

$x_1 + x_2 \leq 2$

$x_1, x_2 \geq 0$ *[NUMSc-99, 14]*

সমাধানঃ সমস্যাটিকে ম্যাট্রিক্স আকারে প্রকাশ করে পাই,

গরিষ্ঠকরণঃ $z = (2, 3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (x_1, x_2)\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

শর্তসমূহঃ $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$x_1, x_2 \geq 0$

CamScanner