< Topological & Functional Analysis Suggestions 2023 >

1. ধরি, একটি নর্মড জগত N এর একটি আবদ্ধ লিনিয়ার উপজগত M. যদি $\frac{N}{M}$ একটি কোসেট $x + M$-এর নর্মকে নিম্নোক্তভাবে সংজ্ঞায়িত করা M হয় $||x + M|| = \inf\{||x + m : m \in M\}$ তাহলে $\frac{N}{M}$ একটি নর্মড জগত বা নর্মড লিনিয়ার জগত হবে। [NUH-2021]

2. প্রমাণ কর যে, নিম্নের চিত্রণগুলো অবিচ্ছিন্ন

(i) $f: X \times X \to X, f(x, y) = x + y$

এবং (ii) $f: \mathbb{R} \times X \to X, f(\alpha, x) = \alpha x$

যেখানে X একটি নর্মড জগত এবং $\mathbb{R}$ বাস্তব সংখ্যার ফিল্ড। [NUH-17]

3. . $l_p, 1 \leq p < \infty$ একটি বানাক জগত। [NUH- 18]

4. l_p এর দ্বৈত জগত l_q যেখানে $1 < p < \infty$ এবং q, p এর কনজুগেট অর্থাৎ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ [NUH- 19]

5. . সামন্তরিক সূত্র {অন্তঃগুণজ জগত X এর যেকোনো দুটি উপাদান x ও y এর জন্য} [NUH- 21]

6. মেরুকরণ অভেদ {অন্তঃগুণজ জগত X এর যেকোনো দুটি উপাদান x ও y এর জন্য} [NUH- 21]

7. ধরি, $T : X \to X$ একটি যোগাশ্রয়ী সীমাবদ্ধ অপারেটর। যেখানে X একটি হিলবার্ট জগত। তাহলে $\alpha \in C$ এবং

$T, S \in B(X)$ এর জন্য নিম্নলিখিত সূত্র সত্য।

i) $T** = T$ [NUH- 20]

ii) $||T*|| = ||T||$ [NUH- 20]

8. যদি একটি হিলবার্ট জগত H এর ওপর T এমন একটি অপারেটর যেন $\forall x \in H\langle Tx, x\rangle = 0$ তাহলে T = 0 হবে। [NUH- 20]

9. হিলবার্ট জগত X-এ একটি অপারেটর T স্বকীয় অ্যাডজয়েন্ট হবে যদি এবং কেবল যদি $< Tx, x >$ বাস্তব হয় $\forall x \in X$. [NUH-2021]

10. একটি হিলবার্ট জগত X- এ একটি সীমাবদ্ধ যোগাশ্রয়ী অপারেটর নর্মাল হবে যদি এবং কেবল যদি $\forall x \in X \; \|T^* x\| = \|Tx\|$ [NUH-2020]

11. হিলর্বাট জগত H এর একটি বদ্ধ উত্তল উপসেট C, ক্ষুদ্রতম নর্মের অনন্য ভেক্টর ধারণ করে। [NUH-18]

12. প্রজেকশন উপপাদ্য { যদি হিলবার্ট জগত X এর একটি বদ্ধ উপজগত M হয়, তাহলে $X = M \oplus M^{\perp}$ [NUH-20]

13. উপযুক্ত উদাহরণের সাহায্যে দেখাও যে, যদিও চিত্রণ T , $\|T(x) - T(y)\| \leq K|x - y\|$, যেখানে K < 1 কে সিদ্ধ করে তথাপিও উহার নির্দিষ্ট বিন্দু নাই। [NUH- 15]

14. মনে করি , $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ চিত্রণটি $T(x) = \frac{1}{2}x$ সংজ্ঞায়িত। দেখাও যে, T বানাক সংকোচন নীতি সিদ্ধ করে এবং T এর একটি অনন্য নির্দিষ্ট বিন্দু আছে। [NUH-2021]

15. ধরো , $T: R \to R$ নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত

$$T(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{2}e^x \text{ যেখানে } [for]\, x \leq 0 \\ -\frac{1}{2} + -\frac{1}{2}\, x \text{যেখানে } [for]\, x \geq 0 \end{cases}$$

দেখাও যে, T বানাক সংকোচন উপপাদ্য সিদ্ধ করে কিন্তু এর কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু নাই। [NUH-2019]

1. প্রত্যেক খোলা গোলক একটি খোলা সেট। [NUH-2020]

2. ধরি, (X, d) এবং (Y, d') দুইটি মেট্রিক জগত এবং $f \to X:Y$ একটি চিত্রণ। তাহলে x_0 বিন্দুতে f অবিচ্ছিন্ন হবে যদি এবং কেবল যদি $x_n \to x_0 \Longrightarrow f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$ হয়। [NUH-2021]

3. মনে করি, (X,d) একটি মেট্রিক জগত। প্রমাণ কর যে, (X, d_1) একটি মেট্রিক জগত। যেখানে যেকোনো দুইটি বিন্দু $x,y \in X$ এর জন্য $d_1(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$ [NUH-2020]

4. যদি X এর দুটি টপোলজি T_1 এবং T_2 হয়। তবে $T_1 \cap T_2$ সেটটি X এর একটি টপোলজি হবে।

[NUH-2014]

5. তিন উপাদান বিশিষ্ট একটি সেটের জন্য ঠিক চারটি উপাদানযুক্ত সকল টপোলজি লিখ। [NUH-15]

6. ধরি, (X, T) একটি টপোজগত এবং $A \cap X$ তাহলে A এর সাপো $T=\{A \cap G | G \in T\}$ একটি টপোলজি।

[NUH-11]

7. যদি X = {p, q, r, s, t} এ সংজ্ঞায়িত একটি টপোলজি T ={ ∅,X, {p} ,{p,q} , {p,q,t} ,{ p,q,r,s} , {p,r,s}} এবং A = {r, s, t} হয়। তাহলে A সেটের পুঞ্জবিন্দু, আবদ্ধক, অন্তঃস্থ বিন্দু, বহিঃস্থ বিন্দু ও সীমানা বিন্দুর সেট নির্ণয় কর। [NUH-19]

8. যদি X = {1, 2, 3, 4, 5} এ সংজ্ঞায়িত একটি টপোলজি T= {Ø, X, {1} , {2}, {1, 2}, {1, 4, 5}, {1, 2, 4, 5}} এবং A = {1,2,3} $\sqsubset$X হয়। তাহলে A সেটের আপেক্ষিক টপোলজি নির্ণয় কর। [NUH-17]

9. মনে কর, X = {a, b, c, d, e} এবং A = {{a, b, c}, {c,d}, {d, e}} তাহলে A দ্বারা সৃজিত X এর একটি টপোলজি নির্ণয় কর। [NUH-14]

10. মনে করি, $(X_e, T_e) : \alpha \in A)$, যেখানে $X=\amalg_n X_e$; টপোলজিক্যাল জগতের (X,T) একটি গুণফল জগত। তবে, গুণফল টপোলজি সাপেক্ষে সংবদ্ধ হবে যদিও কেবল যদি প্রত্যেক জগত X_n সংবদ্ধ হয়। [NUH-17]

11. হাউজডর্ফ জগতের প্রত্যেক অভিসারী অনুক্রমের একটি মাত্র সীমা বিন্দু আছে। [NUH-2021]

12. মনে কর X হলো একটি টপোজগত এবং A হলো X এর একটি সংযুক্ত উপজগত। যদি B, X এর একটি উপজগত হয় যেন $A \sqsubseteq B \sqsubseteq \bar{A}$ তাহলে প্রমাণ কর যে B হলো সংযুক্ত: বিশেষ ভাবে $\bar{A}$ সংযুক্ত। [NUH-2018]

13. একটি সংযুক্ত জগতের একটি অবিচ্ছিন্ন প্রতিবিম্ব সংযুক্ত হবে। [NUH-2016]