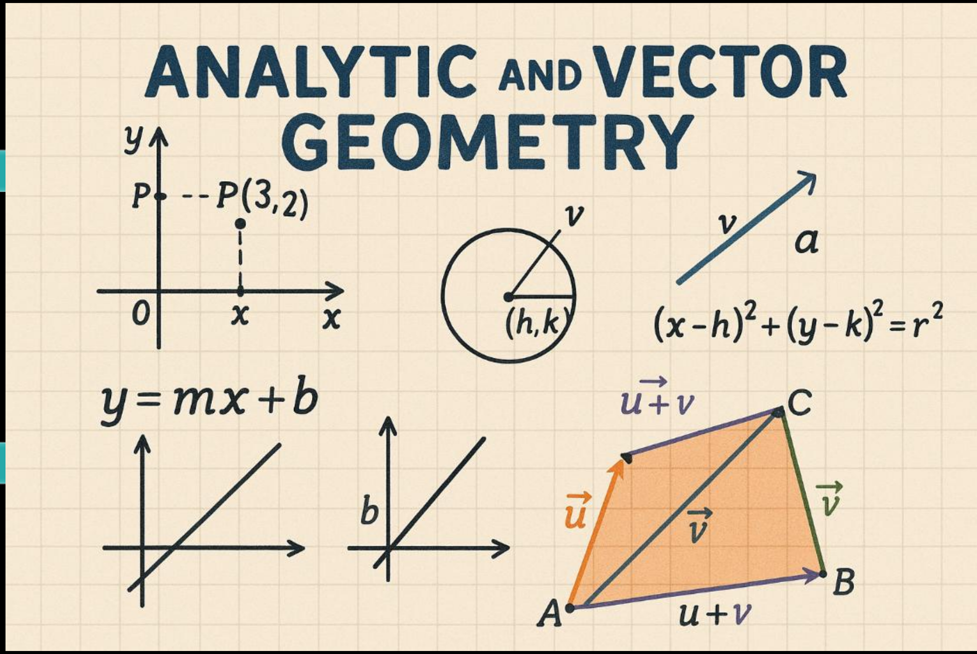
https://pimathclub.com

অনার্স ১ম বর্ষ সাজেশন (২০২৩-২৪)

এনালাইটিক এন্ড ভেক্টর জিওমেট্রি

আলোচনায়: সুদীপ্ত দাশ



For Paid Course : 01628-885434

Transformation of Co-ordinates

https://pimathclub.com

Important Questions :

১। মূলবিন্দুর স্থানান্তর না করে অক্ষদ্বয়কে θ কোণে আবর্তন করলে যদি $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ সমীকরণের রূপান্তরিত সমীকরণ $a_1x^2 + 2\ h_1\ xy + b_1\ y^2 = 0$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $a + b$ এবং $ab - h^2$ অপরিবর্তিত অর্থাৎ $a + b = a_1 + b_1$ এবং $ab - h^2 = a_1\ b_1 - h_1\ ^2$

[জাবি- ১০, ১৫, ১৮, ২২]

২। মূলবিন্দুকে (2,3) বিন্দুতে স্থানান্তর করে অক্ষদ্বয়কে 45° কোণে আবর্তন করলে তখন $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 18x - 22y + 50 = 0$ সমীকরণের রূপান্তরিত সমীকরণ নির্ণয় কর। [জাবি-১০, ১৪, ১৬, ২০]

Important Questions :

https://pimathclub.com

৩। $17x^2 + 18xy - 7y^2 - 16x - 32y - 18 - 0$ সমীকরণ হতে x, y এবং xy যুক্ত পদগুলি অপসারণ করে রূপান্তরিত সমীকরণ নির্ণয় কর। [জাবি-২০১৪, ২০১৭]

৪। যদি $ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 = 0$ দ্বারা প্রকাশিত সরলরেখা তিনটির দুইটি রেখা পরস্পর লম্ব হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $a^2 + ac + bd + d^2 = 0$. [জাবি-২০২০]

৫। $x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x - 4y - 1 = 0$ সমীকরণ থেকে একঘাত বিশিষ্ট পদগুলো অপসারণ কর। [জাবি-২০২১]

Pi Math Club

Pair of Straight Lines

Important Questions :

১। প্রমাণ কর যে, x ও y এর সমমাত্রিক দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ এক জোড়া মূলবিন্দুগামী সরলরেখা প্রকাশ করে। [জাবি- ১২, ১৫, ১৭, ২১; ডিগ্রি (পাস)- ১১, ১৪]

২। যদি সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ একজোড়া সরলরেখা প্রকাশ করে তবে, প্রমাণ কর যে, $\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$

অথবা, আরো প্রমাণ কর যে, সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{hf-bg}{ab-h^2}, \frac{gh-af}{ab-h^2}\right)$

[জাবি- ১৪, ১৭, ২০, ডিগ্রি (পাস)- ১১]

Important Questions :

https://pimathclub.com

৩। যদি $\lambda x^2 - 10xy + 12y^2 + 5x - 16y - 3 = 0$ সমীকরণটি একজোড়া সরলরেখা নির্দেশ করে তাহলে λ মান নির্ণয় কর।

[জাবি-১২, ১৬]

৪। প্রমাণ কর যে, $x^2 + y^2 + 19x + 4y - 3 = 0$ এবং $3x + 4y = 1$ এর ছেদবিন্দুদ্বয়ের সহিত মূলবিন্দুর সংযোগ সরলরেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব হইবে। [জাবি- ১২, ১৩, ২০]

৫। প্রমাণ কর যে, $lx + my + n = 0$ সরলরেখা এবং $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ বক্ররেখার ছেদবিন্দুদ্বয়কে মূলবিন্দুতে সংযোগ করিলে যে সরলরেখা দুইটি উৎপন্ন হয়, তাহারা সমপতিত হবে যদি $a^2 l^2 + b^2\ m^2 = n^2$ হয়। [জাবি-১০, ১৭, ২২]

Pi Math Club

Important Questions :

৬। যদি $ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dxy^3 + ay^4 = 0$ দ্বারা প্রকাশিত সরলরেখাগুলোর দুইটি, অপর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডক হয় তবে প্রমাণ কর যে, $c + 6a = 0$ এবং $b + d = 0$ [জাবি- ১৩, ১৪, ১৭, ১৯, ২১]

৭। যদি $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ সমীকরণ দ্বারা মূলবিন্দু হতে সমদূরবর্তী একজোড়া সরলরেখা সূচিত হয় তবে প্রমাণ কর যে, $g^4 - f^4 = c(ag^2 - bf^2)$ [জাবি- ১৬, ২২; ডিগ্রি (পাস)- ১৫, ১৮]

Important Questions :

৮। যদি $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ সমীকরণ দ্বারা প্রকাশিত দুটি সরলরেখা এবং $lx + my = 1$ দ্বারা গঠিত ত্রিভুজ সমকোণী হয় তবে প্রমাণ কর যে, $(a + b)(a\ell^2 + 2h\ell m + bm^2) = 0$ [জাবি- ২১]

৯। যদি $ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dxy^3 + ay^4 = 0$ দ্বারা প্রকাশিত সরলরেখাগুলোর দুটি অপর দুটি অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডক হয় তবে প্রমাণ কর যে, $c + 6a = 0$ এবং $b + d = 0$ । [জাবি- ২১]

General Equation of Second Degree

https://pimathclub.com

Important Questions :

১। নিচের সমীকরণটির প্রকৃতি ও কেন্দ্র নির্ণয় কর।

$3x^2 - 2xy - y^2 + 2x + y - 1 = 0$ [জাবি- ২০]

২। কণিকাটিকে প্রমাণ আকারে রূপান্তর কর।

$x^2 - 4xy - 2y^2 + 10x + 4y = 0$ [জাবি-১৯, ২২]

৩। $x^2 + 2xy + y^2 - 6x - 2y + 4 = 0$ কণিকের প্রকৃতি নির্ণয় কর। উহাকে প্রমাণাকারে রূপান্তর কর। কণিকটির শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য ও সমীকরণ নির্ণয় কর। [জাবি-১১, ১৮, ২২]

Important Questions :

https://pimathclub.com

৪। $8x^2 - 4xy + 5y^2 - 16x - 14y + 17 = 0$ সমীকরণটিকে প্রমাণ আকারে প্রকাশ কর। [জাবি- ২১]

৫। $8x^2 - 4xy + 5y^2 - 16x - 14y + 17 = 0$ সমীকরণটি কোন কণিক প্রকাশ করে? ইহাকে প্রমাণরূপে প্রকাশ কর। আরো কণিকটির অক্ষের দৈর্ঘ্য, অক্ষের দৈর্ঘ্য, অক্ষের সমীকরণ, অক্ষের ঢাল, উৎকেন্দ্রতা, শীর্ষ বিন্দু, উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য ও সমীকরণ এবং দিকাক্ষ এর সমীকরণ নির্ণয় কর। [জাবি- ১০, ১৫, ২১]

বিঃদ্রঃ মনে রাখতে হবে এখানে নিয়মগুলি ফলো করবেন ।

Pi Math Club

Three Dimensional Cartesian Co-ordinates

Important Questions :

১। দিক কোসাইনের মৌলিক উপপাদ্যটি বর্ণনা ও প্রমাণ কর। [জাবি-১৫, ১৯]
অথবা, প্রমাণ কর যে, ℓ, m, n যদি দিক কোসাইন হয় তাহলে, $\ell^2 + m^2 + n^2 = 1$ [জাবি-১৩, ২২]

২। যদি (l_1, m_1, n_1) এবং (l_2, m_2, n_2) দিক কোসাইন হয় এবং AB ও CD দুইটি সরলরেখা এবং তাদের মধ্যবর্তী কোণ θ হলে, দেখাও যে, $\text{Cos}\theta = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2$. অথবা, আরো সরলরেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব হওয়ার শর্ত নির্ণয় কর। [জাবি- ২০]

https://pimathclub.com

৩। যদি কোনো সরলরেখা একটি ঘনকের চারটি কর্ণের সহিত $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ কোণ উৎপন্ন করে, তবে দেখাও যে, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\delta = \frac{4}{3}$ [জাবি-২০১৯]

৪। দুইটি সরলরেখার দিক-কোসাইন $a\ell + bm + cn = 0$ ও $u\ell^2 + vm^2 + wn^2 = 0$ দ্বারা নির্দেশিত হইলে প্রমাণ কর যে, রেখাদ্বয় লম্ব হইবে যদি, $a^2(v + w) + b^2(w + u) + c^2(u + v) = 0$ হয়, সমান্তরাল হইবে যদি $\frac{a^2}{u} + \frac{b^2}{v} + \frac{c^2}{w} = 0$ হয়। [জাবি-১৩, ২১]

Pi Math Club

https://pimathclub.com

Important Questions :

৫। দুটি সরলরেখার দিক-কোসাইন $al + bm + cn = 0$ ও $fmn + gnl + nlm = 0$ দ্বারা নির্দেশিত হইলে প্রমাণ কর যে, সরলরেখার লম্ব হইবে যদি $\frac{f}{a} + \frac{g}{b} + \frac{h}{c} = 0$ হয় এবং সরল রেখার সমান্তরাল হইবে যদি, $\sqrt{af} \pm \sqrt{bg} \pm \sqrt{ch} = 0$ [জাবি- ১৫, ১৮, ২২]

৬। একটি ঘনকের দুইটি কর্ণের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। [জাবি- ১৪]

Important Questions :

https://pimathclub.com

৭। দুইটি সরলরেখার দিক কোসাইন $\ell - 5m + 3n = 0$ এবং $7\ell^2 + 5m^2 - 3n^2 = 0$ সমীকরণ দ্বারা নির্দেশিত হলে রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। [জাবি- ১৪]

৮। যে সরলরেখা অক্ষত্রয়ের সাথে সমান কোণ উৎপন্ন করে তার দিক কোসাইন নির্ণয় কর। [জাবি- ২১]

Pi Math Club

The Planes

https://pimathclub.com

Important Questions :

১। $(1,0,-1)$ এবং $(2,1,3)$ বিন্দুগামী এবং $2x+y+z+1=0$ সমতলের উপর লম্ব সমতলের সমীকরণ নির্ণয় কর। [জাবি-২২]

২। $2x+y+2z+3=0$ ও $x+2y-z=0$ সমতলদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী ও মূলবিন্দু হতে একক দূরবর্তী সমতলের সমীকরণ নির্ণয় কর।
[জাবি- ১৬; ডিগ্রি (পাস)- ১৮]

৩। যদি একটি চলমান সমতল মূলবিন্দু হইতে সর্বদা P দূরত্বে থাকে এবং স্থানাঙ্কের অঙ্কদ্বয়ের A, B, C বিন্দুতে ছেদ করে তবে দেখাও যে, OABC চতুস্তলকের ভরকেন্দ্রের সঞ্চার পথের সমীকরণ $x^{-2}+y^{-2}+z^{-2}=16P^{-2}$
[জাবি -২০; ডিগ্রি (পাস)- ১৭]

Pi Math Club

Important Questions :

https://pimathclub.com

৪। যদি একই মূলবিন্দুর সাপেক্ষে দুই শ্রেণির আয়তাকার অক্ষত্রয়কে কোনো সমতল a, b, c এবং a_1, b_1, c_1 দূরত্ব ছেদ করে, তবে দেখাও যে, $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{{a_1}^2}+\frac{1}{{b_1}^2}+\frac{1}{{c_1}^2}$ [জাবি-১৪, ২১]

৫। যদি একই মূলবিন্দু সাপেক্ষে দুই শ্রেণির আয়তাকার অক্ষত্রয়কে কোনো সমতল মূলবিন্দু হতে a, b, c এবং a1, b1, c1 দূরত্বে ছেদ করে, তবে দেখাও যে, $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{{a_1}^2}+\frac{1}{{b_1}^2}+\frac{1}{{c_1}^2}$ [জাবি-২১]

Pi Math Club

The Straight Lines

https://pimathclub.com

Important Questions :

১। দেখাও যে, $3x + 4y - z - 7 = 0$ সমতলের উপর লম্ব এবং $(1,2,3)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{-1}$ । [জাবি-১১, ১৩, ১৭]

২। $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{6}$ সরলরেখা এবং $4x - 3y + 2z + 6 = 0$ সমতলের ছেদবিন্দু এবং $(1,1,1)$ বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর। [জাবি-১২, ১৮, ২১]

৩। $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-4}{4}$ এবং $\frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-5}{5}$ সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে ন্যূনতম দূরত্ব এবং ন্যূনতম দূরত্ব রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[জাবি-১৩, ১৫, ১৮, ২০; ডিগ্রি (পাস)-১০, ১৩]

Pi Math Club

Important Questions :

https://pimathclub.com

৪। দেখাও যে, $\frac{x+4}{5}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-3}{1}$ এবং $3x-2y+13=0=y+3z-26$ সরলরেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব। [ডিগ্রি (পাস)-১৬, জাবি-২২]

৫। $(1,1,1)$ বিন্দু থেকে $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{6}$ সরলরেখা এবং $4x-3y+2z+6=0$ সমতলের ছেদবিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর। [জাবি-২১]

৬। $\frac{x-3}{3}=\frac{y-8}{-1}=\frac{z-3}{1}$ এবং $\frac{x+3}{-3}=\frac{y+7}{2}=\frac{z-6}{4}$ সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী ক্ষুদ্রতম দূরত্ব নির্ণয় কর এবং ক্ষুদ্রতম দূরত্বরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [জাবি-২১]

Pi Math Club

Spheres

https://pimathclub.com

Important Questions :

১। একটি গোলকের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র $(2,1,-3)$ এবং যাহা $2x-4y+5z=0$ সমতলটিকে স্পর্শ করে। [জাবি-১০, ১১, ১৫, ২১]

২। $x-2y+2z-1=0$ সমতলকে স্পর্শকারী এবং $x^2+y^2+z^2-4x-y+3z+12=0, 2x+3y-7z-10=0$ বৃত্তগামী গোলকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [জাবি-১০, ১৫, ১৭, ২১]

৩। যে গোলকের $x^2+y^2+z^2+7y-2z+2=0, 2x+3y+4z-8=0$ বৃত্তটি বৃহত্তর বৃত্ত তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর। [জাবি-১০, ১৩, ১৬, ১৮, ২০]

Pi Math Club

Important Questions :

৪। একটি গোলকের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র $(2,1,-3)$ এবং যা $2x - 4y + 5z = 0$ সমতলটিকে স্পর্শ করে। [জাবি-২১]

৫। $\mathrm{x - 2y + 2z - 1 = 0}$ সমতলকে স্পর্শকারী এবং $\mathrm{x^2 + y^2 + z^2 - 4x - y + 3z + 12 = 0, 2x + 3y - 7z - 10 = 0}$ বৃত্তগামী গোলকের সমীকরণ নির্নয় কর। [জাবি-২১]

Vector and Scalar

https://pimathclub.com

Important Questions :

১। দেখাও যে সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। [ডিগ্রি (পাস)- ১১, ১৩, ১৬]

২। দেখাও যে, রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পর লম্ব। [ডিগ্রি (পাস)-১৪, ১৫, ২০]

৩। যদি $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$ হয় তবে দেখাও যে, $\vec{a}$ ভেক্টরটি $\vec{b}$ এর উপর লম্ব। [জাবি-১৬]

৪। $\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ এবং $5\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয়ের উপর লম্ব একক ভেক্টর এবং মধ্যবর্তী কোণের সাইন নির্ণয় কর। [জাবি-১৩, ১৫, ১৭, ২১]

Pi Math Club

Important Questions :

https://pimathclub.com

৫। দেখাও যে সমতলীয় ABC ত্রিভুজ

(i) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ [ডিগ্রি (পাস)-২০১০]

(ii) $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$

(iii) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ [জাবি-২০১৬]

৬। দেখাও যে, $[\vec{a} \times \vec{b}\vec{b} \times \vec{c}\vec{c} \times \vec{a}] = [\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]^2 = \begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{a}\cdot\vec{c} \\ \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{b}\cdot\vec{b} & \vec{b}\cdot\vec{c} \\ \vec{c}\cdot\vec{a} & \vec{c}\cdot\vec{b} & \vec{c}\cdot\vec{c} \end{vmatrix}$

[জাবি- ১০, ১৩, ১৪, ১৬, ২২; ডিগ্রি (পাস)- ১৫]

Pi Math Club

Important Questions :

https://pimathclub.com

৭। দেখাও যে, $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$

[জাবি-১১, ১৩, ১৭, ২১; ডিগ্রি (পাস)- ১৬]

৮। দেখাও যে, $\vec{i} \times (\vec{a} \times \vec{i}) + \vec{j} \times (\vec{a} \times \vec{j}) + \vec{k} \times (\vec{a} \times \vec{k}) = 2\vec{a}$

[ডিগ্রি (পাস)-১৬, জাবি-২২]

৯। দেখাও যে, $[\vec{l}\ \vec{m}\ \vec{n}]\ [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = \begin{vmatrix} \vec{l}\cdot\vec{a} & \vec{l}\cdot\vec{b} & \vec{l}\cdot\vec{c} \\ \vec{m}\cdot\vec{a} & \vec{m}\cdot\vec{b} & \vec{m}\cdot\vec{c} \\ \vec{n}\cdot\vec{a} & \vec{n}\cdot\vec{b} & \vec{n}\cdot\vec{c} \end{vmatrix}$ [জাবি- ১৭]

Important Questions :

১০। দেখাও যে, $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$ [জাবি-২১]

১১। $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ এবং $5\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয়ের উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [জাবি-২১]

১২। $\underline{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}, \underline{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$, এবং $\underline{c} = c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}$ হলে প্রমাণ কর যে, $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = (\underline{a} \cdot \underline{c})\underline{b} - (\underline{a} \cdot \underline{b})\underline{c}$ [জাবি-২১]

Applications of Vectors to Geometry

https://pimathclub.com

Important Questions :

১। সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর যার কর্ণদ্বয় $3\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$ এবং $\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$ ভেক্টর দ্বারা সূচিত হয়। [জাবি- ২০]

THANK YOU